Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik

Diplomarbeit

Traktabilitätsindex und Eigenschaften von matrixwertigen Riccati-Typ Algebrodifferentialgleichungen

Hella Döring
geboren am 25.06.1977 in Potsdam
Betreuerin Prof. Dr. Roswitha März
Berlin, den 26. Oktober 2004

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

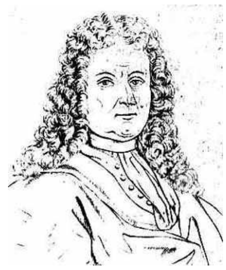
Ziel dieser Arbeit ist es matrixwertige Algebrodifferentialgleichungen vom Riccati-Typ

$$\begin{aligned} -B^T(t)\left(A^T(t)X(t)\right)'B(t) &= B^T(t)X^T(t)C(t)+C^T(t)X(t)B(t) \\ &\quad - B^T(t)X^T(t)R(t)X(t)B(t)+W(t) \end{aligned} \tag{0.1}$$

auf ihre numerische Behandelbarkeit zu untersuchen. Dazu wird der Begriff des regulären Traktabilitätsindexes so erweitert, dass auch diese Gleichungen charakterisiert werden können.

Die erste bekannte Analyse einer Riccati-Differentialgleichung

$$y' = x^2 + y^2 \tag{0.2}$$



J. F. Riccati

wurde von Johann Bernoulli in einer Arbeit in der *Acta Eruditorum* vom November 1694 publiziert [Heu95]. Erst 1702 konnte sein älterer Bruder, Jakob Bernoulli, die Lösung dieser Gleichung mittels Reihen angeben. Benannt wurde die Riccatische Differentialgleichung nach dem italienischen Grafen Jacopo Francesco Riccati (1676 - 1754). Er veröffentlichte 1724 einen Artikel in der *Acta Eruditorum*, in dem er die Rekonstruktion einer planaren Kurve mit Hilfe ihrer Krümmungseigenschaften erörterte [Zel00]. Riccati leitete daraus eine Verallgemeinerung von (0.2)

$$b\frac{dx}{dt} = at^\alpha + x^2 \tag{0.3}$$

her, konnte sie jedoch nicht lösen.

Joseph Liouville veröffentlichte 1841 einen Artikel, in dem er einen Beweis lieferte, dass die Gleichung (0.3), von Spezialfällen abgesehen, nicht durch Quadraturen lösbar ist[1]. Später wurden nicht nur Gleichungen vom Typ (0.3) als *Riccati Gleichungen* bezeichnet, sondern auch alle anderen Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit quadratischer rechter Seite.

Für das Lösen von linearen Systemen regulärer gewöhnlicher Differentialgleichungen haben sich in der Vergangenheit Verfahren etabliert, die zum Teil auf das Lösen von nichtlinearen, regulären Differentialgleichungen führen. Dazu gehören neben der Riccati-Methode auch die Methoden von Abramov, Bakhvalov oder Godunov (vgl. dazu die Ausführungen in [AMR88], [vL87] und [Pet98]). Ein Grund für die Anwendung solcher Verfahren ist, neben den oft besseren Stabilitätseigenschaften, die meist einfachere numerische Lösbarkeit der resultierenden, nichtlinearen Gleichung. Allerdings muss beim Übergang von linearen zu nichtlinearen Gleichungen auf die Lösbarkeit der transformierten Gleichung geachtet werden. Diese kann im Allgemeinen nicht auf dem gesamten Intervall gesichert werden. Hinzu kommen bei matrixwertigen Gleichungen die Auswirkungen auf Rechenzeit und Speicherplatz bereits bei leichter Erhöhung der Dimensionen [Pet98].

Algebrodifferentialgleichungen (DAEs - engl. Differential Algebraic Equations) sind Gleichungen vom Typ

$$f\left(x'(t), x(t), t\right) = 0.$$

[1] D. h. ihre Lösung lässt sich nicht durch endlich viele hintereinander ausgeführte Integrationen finden [BS87].

Sie lassen sich, im Gegensatz zu regulären gewöhnlichen Differentialgleichungen, nirgendwo nach x' auflösen, da sie zusätzlich algebraische Gleichungen enthalten. Daher lässt sich auf DAEs die Standardtheorie für reguläre gewöhnliche Differentialgleichungen nicht anwenden.

Algebrodifferentialgleichungen treten in einer Vielzahl von Problemstellungen auf. Darunter findet man neben der Simulation elektrischer Netzwerke und der Modellierung von technischen und natürlichen Prozessen, auch optimale Steuerungsprobleme, die auf Euler-Lagrange-Gleichungen führen. Seit den 80er Jahren wird daher an einer Theorie für Algebrodifferentialgleichungen gearbeitet.

In [BM02] wird für lineare DAEs eine neue Formulierung, die so genannte propere Formulierung, vorgestellt. Lineare Algebrodifferentialgleichungen lassen sich nun als Gleichungen der Form

$$A(t)\,(D(t)\,x(t))' + B(t)\,x(t) = q(t)$$

schreiben. Dabei werden die Koeffizienten so gewählt, dass A und D in einem gewissen Sinne gut zusammenpassen. An D lässt sich nun genau ablesen, von welchen Komponenten die Ableitungen tatsächlich benötigt werden. Des Weiteren hat die adjungierte Gleichung nun dieselbe Form wie die DAE selbst. Diese Formulierung wird in [HM00] und [Mär01c] auf quasilineare und nichtlineare Algebrodifferentialgleichungen erweitert. Für Gleichungen mit quadratischem $G_0 = AD$ wurde der Begriff des regulären Traktabilitätsindexes entwickelt. Er kennzeichnet den Schwierigkeitsgrad der numerischen Behandelbarkeit (engl. tractability) von linearen und nichtlinearen, proper formulierten Algebrodifferentialgleichungen. In [BM02] wurden erstmals DAEs mit stetigen Koeffizienten und Traktabilitätsindex 1 und 2 eingeführt und analysiert.

Parallel zur Entwicklung der Theorie von DAEs beginnt die Untersuchung von Optimalsteuerungsproblemen mit gesteuerten DAEs (z. B. in [Kur93]). In [BKM03] werden für gesteuerte Algebrodifferentialgleichungen

$$A(t)\,(B(t)\,x(t))' = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)$$

mit dem Kostenfunktional

$$\begin{aligned} J(u,x) := &\frac{1}{2}\langle x(T), Vx(T)\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T \left\langle \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W(t) & S(t) \\ S^T(t) & \widetilde{R}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \end{aligned}$$

Bedingungen hergeleitet, die für regulären Traktabilitätsindex 1 der zugehörigen Optimalitäts-DAE

$$\begin{pmatrix} A(t)\,(B(t)\,x(t))' \\ -B^T(t)\left(A^T(t)\,\psi(t)\right)' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(t) & 0 & D(t) \\ W(t) & C^T(t) & S(t) \\ S^T(t) & D^T(t) & \widetilde{R}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

hinreichend und notwendig sind. Zusätzlich wurde für singuläre, proper formulierte, lineare DAEs erstmals ein Indexbegriff definiert - der singuläre Traktabilitätsindex.

Bei Anwendung der Riccati-Transformation auf (0.4) erhält man eine Gleichung der Form (0.1). Für $A = B = I$ ist X symmetrisch und (0.1) hat die Form einer matrixwertigen, expliziten, gewöhnlichen Differentialgleichung vom Riccati-Typ

$$X'(t) = X(t)\,C(t) + C^T(t)\,X(t) - X(t)\,R(t)\,X(t) + W(t)$$

wie sie zum Beispiel in [Rei72] behandelt wird.

Es stellt sich nun die Frage, inwiefern sich die Riccati-Transformation zum Lösen von Optimalitäts-DAEs eignet und damit ob die Vorteile dieser Methode auch hier zum Tragen kommen. Dazu werden MR-DAEs betrachtet, die aus Optimalitäts-DAEs mittels der Riccati-Transformation entstehen.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die resultierende matrixwertige Riccati-Typ Algebrodifferentialgleichung (MR-DAE) im Allgemeinen nicht regulär ist. Aus diesem Grund wird der bestehende Begriff des Traktabilitätsindexes so erweitert, dass auch diese Gleichungen charakterisiert werden können. Wie beim regulären Traktabilitätsindex geschehen [Mär02a], wird der Index nichtlinearer Gleichungen auch hier über ihre Linearisierung definiert. Es wird gezeigt, wie dieses Vorgehen das Konzept des Traktabilitätsindexes für allgemeine reguläre DAEs [Mär01c], [Mär02a] und für singuläre lineare DAEs [BKM03] sachgemäß auf weitere singuläre DAEs erweitert. Die Definition und die anschließende Untersuchung konzentrieren sich auf den singulären Traktabilitätsindex einer speziellen Form quasilinearer DAEs, zu denen die MR-DAEs gehören. Es wird gezeigt, dass die Lösbarkeitsaussagen des regulären Traktabilitätsindexes nicht auf DAEs mit singulärem Traktabilitätsindex übertragen werden können. An verschiedenen Beispielen wird diese Problematik erläutert.

In der vorliegenden Arbeit werden die Optimalitäts-DAE und die resultierende MR-DAE auf propere Formulierung und Traktabilitätsindex geprüft. Es sollen Bedingungen für die Ausgangsgleichung gefunden werden, die eine gute numerische Behandelbarkeit der MR-DAE sicherstellen. Als erster und wichtiger Schritt in diese Richtung, konnten für MR-DAEs, die aus Optimalsteuerungsproblemen mit gesteuerten, semi-expliziten DAEs mit regulärem Traktabilitätsindex 1 hergeleitet wurden, Bedingungen aufgestellt werden, die singulären Traktabilitätsindex 1 sicherstellen. Schließlich wird ein Ansatz skizziert, wie durch Entfernen von Gleichungen und Aufstellen von Konsistenzbedingungen eine reguläre DAE mit Traktabilitätsindex 1 aus der MR-DAE herausgefiltert werden könnte, die dieselbe Lösungsmenge besitzt, wie die ursprüngliche MR-DAE.

Bei der Anwendung der Riccati-Transformation zum Lösen von Optimalitäts-DAEs können die Lösbarkeitseigenschaften nicht auf die resultierende Gleichung übertragen werden. In [KM97] werden an einem Beispiel einige Schwierigkeiten erläutert, die beim Lösen von Riccati-transformierten DAEs auftreten. Während die Optimalitäts-DAE regulären Traktabilitätsindex 1 aufweist, und damit eindeutig lösbar ist, ist die zugehörige MR-DAE im Allgemeinen nicht oder nicht eindeutig lösbar.

Der praktische Teil dieser Diplomarbeit befasst sich mit der Erarbeitung und Implementierung eines Algorithmuses zur Bestimmung des regulären und singulären Traktabilitätsindexes $0 \leq \mu \leq 1$ linearer DAEs. Es wird eine Bedingung hergeleitet, die die Konstruktion der Projektoren für singuläre DAEs ermöglicht. Als Grundlage für die Implementierung dienen die von R. Lamour entwickelten Programme zur Bestimmung des regulären Traktabilitätsindexes [Lam01].

Das 1. Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich mit einer Einführung in die Theorie von Algebrodifferentialgleichungen. Grundlegende Begriffe und Bezeichnungen und das Konzept des Traktabilitätsindexes werden vorgestellt. Die Definition des singulären Traktabilitätsindexes wird auf eine spezielle Form quasilinearer DAEs erweitert. Es wird gezeigt, wie dieser neue Indexbegriff das bestehende Konzept konsequent ergänzt. Anhand von Beispielen werden schließlich die unterschiedlichen Eigenschaften von DAEs mit singulärem und regulärem Index demonstriert. Anschließend erfolgt in Kapitel 2 die Untersuchung und Riccati-Transformation der aus Optimalsteuerungsproblemen mit gesteuerten, linearen Algebrodifferentialgleichungen entstandenen Optimalitäts-DAEs. Die Eigenschaften der daraus resultierenden MR-DAE werden in Kapitel 3 analysiert. Im 4. Kapitel werden die mit Optimalsteuerungsproblemen mit gesteuerten, semi-expliziten DAEs assoziierten MR-DAEs betrachtet. Konkrete Beispiele verdeutlichen die Problematik des Lösens von matrixwertigen Riccati-Typ DAEs. Zusätzliche Bedingungen für diese Probleme, die singulären Traktabilitätsindex 1 der MR-DAEs sicherstellen, werden vorgeschlagen.

Die Konstruktion der Projektoren zur Indexbestimmung wird im 5. Kapitel dieser Arbeit hergeleitet. An einem Beispiel wird die Funktionsweise des Indextesters demonstriert. In Anhang B sind die entsprechenden Programmcodes aufgeführt. Für die Anwendung des Programms befinden sich alle notwendigen Dateien auf dem Datenträger, der dieser Diplomarbeit beiliegt.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während meiner Diplomarbeitsphase unterstützt haben. Insbesondere danke ich Frau Prof. R. März für ihre stets freundlichen und konstruktiven Hinweise, sowie die klärenden Diskussionen. Herrn Dr. R. Lamour bin ich besonders für seine Unterstützung bei der Implementierung in MatLab dankbar.

Bezeichnungen

Die Theorie von Algebrodifferentialgleichungen wird so eingeführt, dass die Notation mit den entsprechenden, bereits erschienenen Arbeiten korrespondiert. Um in den folgenden Kapiteln Verwechslungen mit den Koeffizienten der Optimalitäts-DAE zu vermeiden, können die Koeffizienten der DAE nicht wie üblich mit A und D bezeichnet werden. Hier wird die Notation A_0 und D_0 gewählt. Die Koeffizienten der Optimalitäts-DAE werden so bezeichnet, wie sie in [BKM03] eingeführt wurden.

Des Weiteren wird für die Bezeichnung von Matrixfunktionen eine verkürzte Schreibweise gewählt. Es sei $A : \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ eine Matrixfunktion mit $t \mapsto A(t)$. Anstelle der mathematisch korrekten Bezeichnung $A(t) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ steht oft $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Weitere, in dieser Arbeit verwendete Bezeichnungen sind im Folgenden aufgelistet.

Abkürzungen

AWA	Anfangswertaufgabe
RWA	Randwertaufgabe
DAE	Differential Algebraic Equation (engl. für Algebrodifferentialgleichung)
MR-DAE	Matrix-Riccati-Algebrodifferentialgleichung
SVD	Singular-Value Decomposition (engl. für Singulärwertzerlegung)
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
vgl.	vergleiche
s. a.	siehe auch
u. a.	unter anderen
z. B.	zum Beispiel
bzw.	beziehungsweise
d. h.	das heißt
wg.	wegen
engl.	englisch
S.	Seite
f.	folgende [Seite]
ff.	folgende [Seiten]

Allgemeine Symbole

$\exists$	"es existiert"
$\forall$	"für alle"
δ_{ij}	$= \begin{cases} 1 & \text{, für } i = j \\ 0 & \text{, für } i \neq j. \end{cases}$
$\mu \in \mathbb{N}_0$	Traktabilitätsindex

Spezielle Mengen und Räume, Operationen

$\emptyset$	leere Menge
$\subseteq$	echte Teilmenge oder Gleichheit
$\cap$	Schnittmenge
$\cup$	Vereinigungsmenge
$\in$	Element von
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N}^{\leq n}$	$:= \{m \in \mathbb{N} \| m \leq n\}$
$\mathbb{R}^n$	Raum der n-dimensionalen Spaltenvektoren, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
$\mathbb{R}^{>0}$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$	Raum der linearen Abbildungen aus $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$
$L(\mathbb{R}^n)$	Raum der linearen Abbildungen aus $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$
$C(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)$	Raum der stetigen Funktionen $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$
$C^k(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n), k \geq 1$	Raum der k-mal stetig-differenzierbaren Funktionen $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$
$C^1_{D_0}(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)$	$:= \left\{x \in C(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n) \mid D_0 x \in C^1(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)\right\}$
$\mathcal{M}_0(t)$	Mannigfaltigkeit, die durch die Nebenbedingungen der DAE bestimmt wird (1.2)
$N_i, S_i, \quad i \in \mathbb{N}_0$	Unterräume der Matrixkette, vgl. Seite 11
$\oplus, \ominus$	Direkte Summe und Differenz, vgl. Abschnitt A.1
$\operatorname{im} A$	$:= \{x \in \mathbb{R}^n \| \exists w \in \mathbb{R}^m : Aw = x\}$
$\ker A$	$:= \{x \in \mathbb{R}^m \| Ax = 0\}$
$\dim V$	Dimension des Raumes V
$V^\perp$	orthogonales Komplement zum Raum V
$<,>$	Skalarprodukt

Spezielle Matrizen, Operationen auf bzw. zwischen Matrizen

A^T	transponierte Matrix von A
A^-	reflexive Inverse der Matrix A
A^+	Moore-Penrose-Inverse der Matrix A
$A = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$	$\in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $n \times m$ Matrix mit den Einträgen a_{ij} an der Stelle i, j
$A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$	$:= \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^n)$ Diagonalmatrix
$\operatorname{rg} A$	Rang der Matrix A
$\operatorname{vec} A$	vektorisierte Form der Matrix A, siehe auch Anhang A
I, I_n	Einheitsmatrix (im $L(\mathbb{R}^n)$)
$0, 0_n, 0_{n\times k}$	Null $\left(\text{-vektor im } \mathbb{R}^n \text{ bzw. -matrix in } L\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n\right)\right)$
$G_i, B_i, \quad i \in \mathbb{N}_0$	Matrizen der Matrixkette, vgl. Seite 11
$\mathcal{Q}_i, \mathcal{P}_i, \mathcal{R}, \quad i \in \mathbb{N}_0$	Projektoren der Matrixkette, vgl. Seite 11
$P(m, n)$	Permutationsmatrix (vgl. Anhang A)
$\otimes$	Kronecker Produkt, Matrixoperation vgl. Anhang A ab Seite 82
f'	Ableitung von f nach t
$[f]_x$ bzw. f_x	Ableitung der Funktion f nach x
$\\|.\\|_\infty$	Maximum-Norm im $\mathbb{R}^n$

1 Traktabilitätsindex von regulären und singulären Algebrodifferentialgleichungen

In diesem Abschnitt werden grundlegende Bezeichnungen und Definitionen zur Theorie von Algebrodifferentialgleichungen (DAEs - engl. Differential-Algebraic Equations) zusammengestellt. Die Definitionen der properen Formulierung und des singulären Traktabilitätsindexes für lineare DAEs werden zitiert.

Eine Erweiterung dieses Indexbegriffes auf eine spezielle Form quasilinearer DAEs wird im zweiten Teil dieses Kapitels vorgestellt. Es wird erläutert, inwieweit dieser Begriff des Traktabilitätsindexes das bestehende Konzept ergänzt. Im Anschluss betrachten wir verschiedene einfache Beispiele an denen erläutert wird, welche Schwierigkeiten bei der Behandlung von singulären DAEs - im Vergleich zu regulären DAEs - auftreten.

Quasilineare Algebrodifferentialgleichungen werden in [HM00] als Gleichungen der Form

$$A\left(x\left(t\right),t\right)\left(D\left(t\right)x\left(t\right)\right)' + b\left(x\left(t\right),t\right) = 0$$

eingeführt. Dabei sind $A\left(t\right) \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$, $D\left(t\right) \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right)$, $b\left(x,t\right) \in \mathbb{R}^m$ und $x\left(t\right) \in \mathbb{R}^m$. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit einer speziellen Form quasilinearer DAEs

$$A_0\left(t\right)\left(D_0\left(t\right)x\left(t\right)\right)' + b\left(x\left(t\right),t\right) = 0. \tag{1.1}$$

Dabei ist $A\left(x,t\right) = A_0\left(t\right)$ lediglich von t abhängig, A_0D_0 nicht unbedingt quadratisch, $t \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{I}$ Intervall, und $x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathcal{D}$ offen und zusammenhängend. Die Koeffizienten sind mit

$$A_0\left(t\right) \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right), \qquad D_0\left(t\right) \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right) \qquad \text{und} \qquad b\left(x,t\right) \in \mathbb{R}^k$$

gegeben und stetig. Weiterhin existiere die stetige, partielle Ableitung $b_x\left(x,t\right) \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k\right)$. Gleichungen der Form (1.1) entstehen zum Beispiel bei der später vorgestellten Riccati-Transformation von linearen, homogenen, quadratischen DAEs.

Definition 1.1. [HM00] Eine Funktion $x : \mathcal{I}_x \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{I}_x \subseteq \mathcal{I}$, heißt *Lösung* der Gleichung (1.1) auf dem Intervall $\mathcal{I}_x$, falls $\forall t \in \mathcal{I}_x : x\left(t\right) \in \mathcal{D}$ und

$$x \in C^1_{D_0}\left(\mathcal{I}_x, \mathbb{R}^m\right) := \left\{x \in C\left(\mathcal{I}_x, \mathbb{R}^m\right) \mid D_0x \in C^1\left(\mathcal{I}_x, \mathbb{R}^m\right)\right\}$$

und die Gleichung (1.1) punktweise auf $\mathcal{I}_x$ erfüllt ist.

Für jede Lösung von (1.1) gilt neben $x \in C^1_{D_0}\left(\mathcal{I}_x, \mathbb{R}^m\right)$ auch $x\left(t\right) \in \mathcal{M}_0\left(t\right)$, für alle $t \in \mathcal{I}_x$, wobei

$$\mathcal{M}_0\left(t\right) := \left\{x \in \mathcal{D} \mid b\left(x,t\right) \in \operatorname{im} A_0\left(t\right)\right\}, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{1.2}$$

1.1 Proper formulierter Hauptterm

Die Definition des proper formulierten Hauptterms aus [HM00] lässt sich direkt auf DAEs der Form (1.1) übertragen.

Definition 1.2 (Proper formulierter Hauptterm). Der Hauptterm der DAE (1.1) heißt *proper formuliert*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind

1. $\forall t \in \mathcal{I}$:
$$\ker A_0(t) \oplus \operatorname{im} D_0(t) = \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

2. $\exists \mathcal{R} \in C^1(\mathcal{I}, L(\mathbb{R}^n))$ sodass für alle $t \in \mathcal{I}$:
$$\mathcal{R}(t)^2 = \mathcal{R}(t) \text{ und } \begin{cases} \operatorname{im} \mathcal{R}(t) = \operatorname{im} D_0(t), \\ \ker \mathcal{R}(t) = \ker A_0(t). \end{cases} \tag{1.4}$$

Sind die Bedingungen (1.3) und (1.4) erfüllt, so nennt man das geordnete Paar (A_0, D_0) auch *gut zusammenpassend*. Dabei realisiert der Projektor $\mathcal{R}$ die Zerlegung (1.3). Wichtige Eigenschaften von Projektoren sind im Anhang A.2 zusammengestellt.

Von nun an sei der Hauptterm von (1.1) jeweils proper formuliert. Dann haben die Matrizen $A_0(t)$, $D_0(t)$ und damit auch $G_0(t)$ konstanten Rang [Mär01c]. Weiterhin besitzen die Unterräume $\ker A_0(t)$ und $\operatorname{im} D_0(t)$ stetig differenzierbare Basen. Für alle $t \in \mathcal{I}$ gilt $A_0(t)\mathcal{R}(t) = A_0(t)$ und $\mathcal{R}(t) D_0(t) = D_0(t)$.

In Kapitel 3 untersuchen wir den Hauptterm der transformierten Gleichung auf propere Formulierung. Dabei wird das folgende Lemma hilfreich sein.

Lemma 1.3. *Das geordnete Paar (A_0, D_0) passt genau dann gut zusammen, wenn das Paar $\left(D_0^T, A_0^T\right)$ gut zusammenpasst.*

Beweis. [BM02] Alle Betrachtungen erfolgen punktweise in $t \in \mathcal{I}$, auch wenn t als Argument weggelassen wird.

($\longrightarrow$) Seien (A_0, D_0) gut zusammenpassend, dann sind (1.3) und (1.4) erfüllt. Es gilt

$$\begin{aligned} &\operatorname{im} D_0 \oplus \ker A_0 = \mathbb{R}^n, \\ &\operatorname{im} \mathcal{R} = \operatorname{im} D_0, \quad \ker \mathcal{R} = \ker A_0. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{im} A_0^T &= (\ker A_0)^\perp = (\ker \mathcal{R})^\perp = \operatorname{im} \mathcal{R}^T, \\ \ker D_0^T &= (\operatorname{im} D_0)^\perp = (\operatorname{im} \mathcal{R})^\perp = \ker \mathcal{R}^T \text{ und} \\ \left(\mathcal{R}^T\right)^2 &= \left(\mathcal{R}^2\right)^T = \mathcal{R}^T. \end{aligned}$$

$\rightarrow \ \mathbb{R}^n = \ker \mathcal{R}^T \oplus \operatorname{im} \mathcal{R}^T = \ker D_0^T \oplus \operatorname{im} A_0^T$.

Daher sind dann auch $\left(D_0^T, A_0^T\right)$ gut zusammenpassend und der Projektor $\widetilde{\mathcal{R}} := \mathcal{R}^T$ realisiert die Zerlegung (1.4).

($\longleftarrow$) Die andere Richtung folgt analog. ☐

1.2 Matrixkette

In [Mär02a] und [Mär02b] wurde für reguläre DAEs eine Sequenz von Matrizen und Unterräumen eingeführt, auf deren Grundlage die DAEs weiter analysiert werden. Für DAEs der Form (1.1) definieren wir nun eine spezielle Kette von Matrizen und Unterräumen. Darauf aufbauend wird später in diesem Kapitel der Traktabilitätsindex für reguläre und singuläre DAEs definiert.

Es seien von nun an $\forall\, t \in \mathcal{I}, x \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}
G_0(t) &:= A_0(t)\, D_0(t) \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k\right), \\
N_0(t) &:= \ker G_0(t) \subseteq \mathbb{R}^m, \\
B_0(x,t) &:= b_x(x,t) \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k\right), \\
S_0(x,t) &:= \{z \in \mathbb{R}^m \mid B_0(x,t)\, z \in \operatorname{im} G_0(t)\}, \\
\mathcal{Q}_0(t) &\in L(\mathbb{R}^m) \text{ Projektor auf } N_0(t), \\
\mathcal{P}_0(t) &:= I_m - \mathcal{Q}_0(t), \\
\mathcal{R}(t) &\in C^1(\mathcal{I}, L(\mathbb{R}^n)) \text{ Projektor aus Definition 1.2.}
\end{aligned}$$

Es ist $\operatorname{rg} G_0 =$ konstant. Daher sind $\mathcal{Q}_0$ und $\mathcal{P}_0$ stetig. Weiterhin werden für alle $t \in \mathcal{I}, x \in \mathcal{D}, x^1 \in \mathbb{R}^m$ folgende Bezeichnungen festgelegt

$$\begin{aligned}
G_1(x,t) &:= G_0(t) + B_0(x,t)\, \mathcal{Q}_0(t) \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k\right), \\
N_1(x,t) &:= \ker G_1(x,t), \\
S_1(x,t) &:= \{z \in \mathbb{R}^m | B_0(x,t)\, z \in \operatorname{im} G_1(x,t)\}, \\
\mathcal{Q}_1(x,t) &\in L(\mathbb{R}^m) \text{ Projektor auf } N_1(x,t), \\
\mathcal{P}_1(x,t) &:= I_m - \mathcal{Q}_1(x,t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Diff}_1\left(x^1, x, t\right) &:= \left[D_0 \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1 D_0^-\right]_x (x,t)\, x^1 + \left[D_0 \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1 D_0^-\right]_t (x,t), \qquad (1.5)\\
B_1\left(x^1, x, t\right) &:= B_0(x,t)\, \mathcal{P}_0(t) \\
&\quad - G_1(x,t)\, D_0(t)^- \operatorname{Diff}_1\left(x^1, x, t\right) D_0(t)\, \mathcal{P}_0(t).
\end{aligned}$$

Von nun an werden alle Argumente der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Für $i \geq 2$ (jeweils punktweise in $t \in \mathcal{I}, x \in \mathcal{D},\ x^1, \ldots, x^i \in \mathbb{R}^m$) seien ab jetzt

$$\begin{aligned}
G_i &:= G_{i-1} + B_{i-1} \mathcal{Q}_{i-1} \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k\right), \\
N_i &:= \ker G_i, \\
B_i &:= B_{i-1} \mathcal{P}_{i-1} - G_i D_0^- \operatorname{Diff}_i D_0 \mathcal{P}_0 \ldots \mathcal{P}_{i-1}, \\
S_i &:= \{z \in \mathbb{R}^m | B_0 z \in \operatorname{im} G_i\}, \\
\mathcal{Q}_i &\in L(\mathbb{R}^m) \text{ Projektor auf } N_i, \\
\mathcal{P}_i &:= I_m - \mathcal{Q}_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Diff}_i\left(x^i,\dots,x^1,x,t\right) := \sum_{j=1}^{i-1}&\left[D_0\mathcal{P}_0\dots\mathcal{P}_iD_0^-\right]_{x^j}\left(x^{i-1},\dots,x^1,x,t\right)x^{j+1} \\ &+\left[D_0\mathcal{P}_0\dots\mathcal{P}_iD_0^-\right]_{x}\left(x^{i-1},\dots,x^1,x,t\right)x^{1} \\ &+\left[D_0\mathcal{P}_0\dots\mathcal{P}_iD_0^-\right]_{t}\left(x^{i-1},\dots,x^1,x,t\right).\end{aligned} \tag{1.6}$$

Dabei sind, für $i \geq 2$, die Funktionen G_i, N_i, $\mathcal{Q}_i$, $\mathcal{P}_i$, und $D_0\mathcal{P}_0\dots\mathcal{P}_iD_0^-$ jeweils abhängig von den Argumenten $x^{i-1},\dots,x^1,x,t$ und die Funktionen Diff_i und B_i jeweils abhängig von den Argumenten $x^i,\dots,x^1,x,t$. Außerdem sei D_0^- die durch

$$\begin{aligned}D_0^-D_0D_0^- &= D_0^-, & & & D_0D_0^- &= \mathcal{R},\\ D_0D_0^-D_0 &= D_0 & &\text{und} & D_0^-D_0 &= \mathcal{P}_0\end{aligned}$$

eindeutig bestimmte und in $t \in \mathcal{I}$ stetige, *reflexive Inverse* von D_0 (vgl. dazu Abschnitt A.3, insbesondere Lemma A.6). Bei der Konstruktion der B_i $(i \geq 1)$ muss zusätzlich auf die Existenz der in (1.5) und (1.6) involvierten Ableitungen geachtet werden [BKM03].

Aufgrund der Konstruktion der Matrixkette gilt $\operatorname{rg} G_i \leq \operatorname{rg} G_{i+1}$ für jede DAE und $i \geq 0$. Der reguläre Traktabilitätsindex kennzeichnet DAEs, für die die Sequenz G_i $(i \geq 0)$ stationär wird und G_μ regulär ist. Das bedeutet

$$\exists\mu \geq 0\ \forall j \geq \mu : G_\mu = G_j,\ G_\mu \text{ regulär.}$$

Für den regulären Traktabilitätsindex werden spezielle Projektoren $\mathcal{Q}_i$ verwendet, die der Bedingung $N_0 \oplus \dots \oplus N_{j-1} \subseteq \ker \mathcal{Q}_j$ genügen. Solange $N_i \cap N_j = \{0\}$ $(j = 0,\dots,i-1)$ ist, können die $\mathcal{Q}_i$ so gewählt werden, dass $\mathcal{Q}_i\mathcal{Q}_j = 0$ $(j = 0,\dots,i-1)$ gilt.

Andererseits, falls für ein $i_* \geq 0$ gilt $N_{i_*+1} \cap N_{i_*} = N_{i_*} \cap \ker B_{i_*} \neq \{0\}$, so besteht die gesamte Sequenz $\{G_k\}_{k\geq 0}$ nur aus singulären Matrizen [Mär02b] und die DAE ist nicht regulär. Eine solche DAE wird singulär genannt. Die Bedingung

$$N_0 \oplus \dots \oplus N_{j-1} \subseteq \ker \mathcal{Q}_j,\ j \geq 1$$

ist für singuläre DAEs nicht notwendig erfüllt [BKM03]. Um auch singulären DAEs einen Traktabilitätsindex zuordnen zu können, ist es notwendig den bekannten Begriff des regulären Traktabilitätsindexes zu modifizieren. Wir betrachten dazu zunächst reguläre und singuläre, lineare DAEs.

1.3 Singulärer Traktabilitätsindex für lineare DAEs

Für singuläre, lineare Algebrodifferentialgleichungen der Form

$$A_0(t)\left(D_0(t)\,x(t)\right)' + B(t)\,x(t) = q(t), \tag{1.7}$$

mit $A_0(t) \in L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k\right)$, $D_0(t) \in L\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n\right)$, $B(t) \in L\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^k\right)$, $q(t) \in \mathbb{R}^k$ und $x(t) \in \mathbb{R}^m$ wurde in [BKM03] bereits ein singulärer Traktabilitätsindex $\mu \geq 1$ definiert. Auf dieser Grundlage erfolgt im nächsten Abschnitt eine Erweiterung auf DAEs der Form (1.1) und $\mu \geq 0$. Anhand von Beispielen werden wir zum Abschluss dieses Kapitels sehen, dass nicht alle Gleichungen dieses Typs lösbar oder gar eindeutig lösbar sind. Dennoch ermöglicht dieser neue Indexbegriff nun auch eine Charakterisierung singulärer DAEs.

Die Elemente der Matrixkette aus Abschnitt 1.2 hängen für lineare DAEs nur noch von $t \in \mathcal{I}$ ab. Neben A_0, D_0, G_0, N_0, $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{P}_0$ und $\mathcal{R}$ sind nun auch

$$B_0(t) = b_x(t) \qquad \text{und} \qquad S_0(t) = \{z \in \mathbb{R}^m \mid B_0(t)\, z \in \operatorname{im} G_0(t)\}$$

nur von $t \in \mathcal{I}$ abhängig. Ebenso ist die gesamte Sequenz

$$\begin{aligned} & G_i, \quad N_i, \quad S_i, \quad \mathcal{Q}_i, \quad \mathcal{P}_i, \\ \mathrm{Diff}_i &= \left[D_0\mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_i D_0^-\right]_t = \left(D_0\mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_i D_0^-\right)' \text{ und} \\ B_i &= B_{i-1}\mathcal{P}_{i-1} - G_i D_0^- \left(D_0\mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_i D_0^-\right)' D_0\mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_{i-1}, \end{aligned}$$

für $i \geq 1$, nur von $t \in \mathcal{I}$ abhängig.

Nachdem wir die Matrixkette für lineare DAEs betrachtet haben, kann für diese Gleichungen der singuläre Traktabilitätsindex eingeführt werden. Die folgende Definition vereint die Definitionen (A.1 und A.3 aus [BKM03]) des Traktabilitätsindexes μ für singuläre und reguläre DAEs.

Definition 1.4 (Traktabilitätsindex für lineare DAEs). ([BKM03]) Die lineare Algebrodifferentialgleichung (1.7) heißt

1. *regulär mit Traktabilitätsindex 0*, falls $m = k$ und $\operatorname{rg} G_0 := r_0 = m$.
2. *regulär mit Traktabilitätsindex* $\mu \geq 1$, falls $m = k$ und eine Sequenz (wie in 1.2 definiert) existiert, sodass folgende Bedingungen für $j \geq 1$, punktweise in $t \in \mathcal{I}$, erfüllt sind
   i. G_j hat konstanten Rang r_j auf $\mathcal{I}$,
   ii. $N_0 \oplus \dots \oplus N_{j-1} \subseteq \ker \mathcal{Q}_j$,
   iii. $\mathcal{Q}_j \in C(\mathcal{I}, L(\mathbb{R}^m))$,
   iv. $D_0\mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_j D_0^- \in C^1(\mathcal{I}, L(\mathbb{R}^n))$ und
   v. $r_{\mu-1} < r_\mu = m$.
3. *singulär mit Traktabilitätsindex* $\mu \geq 1$, falls eine Sequenz existiert, sodass für $j \geq 1$, punktweise in $t \in \mathcal{I}$ folgende Bedingungen erfüllt sind
   i. G_j hat konstanten Rang r_j auf $\mathcal{I}$,
   ii. $(N_0 + \dots + N_{j-1}) \ominus ((N_0 + \dots + N_{j-1}) \cap N_j) \subseteq \ker \mathcal{Q}_j$,
   iii. $\mathcal{Q}_j \in C(\mathcal{I}, L(\mathbb{R}^m))$,
   iv. $D_0\mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_j D_0^- \in C^1(\mathcal{I}, L(\mathbb{R}^n))$ und
   v. $G_{\mu-1} \neq G_\mu$, $G_\mu = G_{\mu+1}$, G_μ singulär.

Die Bedingung 3ii bedeutet

$$\forall j \geq 1\ \exists X_j \subseteq \ker \mathcal{Q}_j : \ X_j \oplus ((N_0 + \dots + N_{j-1}) \cap N_j) = N_0 + \dots + N_{j-1}$$

(vgl. dazu auch die Anmerkungen im Anhang A.1). Es genügt also, dass eine solche Zerlegung existiert. Diese hängt wiederum von der Wahl der Projektoren $\mathcal{Q}_0, \dots, \mathcal{Q}_j$ ab.

Für reguläre DAEs wurde in [Mär02c] gezeigt, dass die Unterräume $N_0 \oplus \dots \oplus N_i$, $\operatorname{im} G_i$, S_i sowie die Werte $r_i = \operatorname{rg} G_i$ $(i = 1, \dots, k)$ unabhängig von der speziellen Wahl der Sequenz von Projektoren $\mathcal{Q}_0, \dots, \mathcal{Q}_k$ sind. In [Mär04] wurde gezeigt, dass die Räume $N_0 + \dots + N_i$, $\operatorname{im} G_i$ und S_i sowie die Werte $r_i = \operatorname{rg} G_i$ ebenfalls unabhängig von der speziellen Wahl der Sequenz von Projektoren sind. Damit ist sowohl der reguläre als auch der singuläre Traktabilitätsindex unabhängig von der speziellen Wahl der jeweils zulässigen Projektoren.

1.4 Linearisierung und Traktabilitätsindex für spezielle quasilineare DAEs

Im vorigen Abschnitt wurde der singuläre Traktabilitätsindex für lineare DAEs eingeführt. Da die Gleichungen, die wir später aus der Riccati-Transformation erhalten, nicht linear sind, wird der Indexbegriff noch einmal erweitert. Dann kann neben nichtlinearen regulären DAEs auch singulären DAEs der Form (1.1) ein Traktabilitätsindex zugeordnet werden.

Zunächst betrachten wir eine Linearisierung der DAE (1.1) und die zugehörige Matrixkette. Anschließend wird der Traktabilitätsindex in seiner neuen Form definiert. Wie bei nichtlinearen, regulären DAEs [Mär02a] werden auch nichtlineare, singuläre DAEs auf Grundlage ihrer Linearisierung charakterisiert. Es wird gezeigt, dass die Definition des singulären Traktabilitätsindexes so gewählt wurde, dass sie das bisher entwickelte Konzept sachgemäß ergänzt.

Definition 1.5 (Linearisierung). Die Algebrodifferentialgleichung

$$A_L(t)\left(D_L(t)\,z(t)\right)' + B_L(t)\,z(t) = q(t), \qquad t \in \mathcal{I}_L \subseteq \mathcal{I},\ z \in C^1_{D_0}(\mathcal{I}_L, \mathbb{R}^m) \tag{1.8}$$

mit $A_L(t) := A_0(t)$, $D_L(t) := D_0(t)$ und $B_L(t) := b_x(x_L(t), t) \in L(\mathbb{R}^m)$ heißt *Linearisierung* von (1.1) längs der Funktion $x_L \in C^1_{D_0}(\mathcal{I}_L, \mathbb{R}^m)$.

Der Anfang der Matrixkette hat nun für die Linearisierung längs $x_L \in C^1_{D_0}(\mathcal{I}_L, \mathbb{R}^m)$ folgende Gestalt

$$\begin{aligned}
G_{L0}(t) &= A_0(t)\,D_0(t) = G_0(t),\\
N_{L0}(t) &= N_0(t),\\
B_{L0}(t) &= b_x(x_L(t), t) = B_0(x_L(t), t),\\
\mathcal{Q}_{L0}(t) &:= \mathcal{Q}_0(t),\\
S_{L0}(t) &= \{z \in \mathbb{R}^m \,|\, B_{L0}(t)\,z \in \operatorname{im} A_L(t)\}\\
&= \{z \in \mathbb{R}^m \,|\, B_0(x_L(t), t)\,z \in \operatorname{im} A_0(t)\}\\
&= S_0(x_L(t), t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{L1}(t) &= G_{L0}(t) + B_{L0}(t)\,\mathcal{Q}_{L0}(t)\\
&= G_0(t) + B_0(x_L(t), t)\,\mathcal{Q}_0(t)\\
&= G_1(x_L(t), t),\\
N_{L1}(t) &= N_1(x_L(t), t),\\
\mathcal{Q}_{L1}(t) &:= \mathcal{Q}_1(x_L(t), t),\\
D_L(t)\,\mathcal{P}_{L0}(t)\,\mathcal{P}_{L1}(t)\,D_L^-(t) &= D_0(t)\,\mathcal{P}_0(t)\,\mathcal{P}_1(x_L(t), t)\,D_0^-(t).
\end{aligned}$$

Die Kette wird nun analog zu den Ausführungen in 1.2 fortgesetzt. Der singuläre Traktabilitätsindex für Gleichungen der Form (1.1) kann jetzt definiert werden. Anschließend betrachten wir den neuen Indexbegriff im Vergleich zu den bekannten Definitionen für reguläre, nichtlineare und singuläre, lineare DAEs. Dieser neue Indexbegriff, beinhaltet sowohl die Definition des regulären Traktabilitätsindexes $\mu \geq 0$ (z. B. aus [Mär02a]) als auch die des singulären Traktabilitätsindexes $\mu \geq 1$ für lineare DAEs aus [BKM03], jeweils als Spezialfall.

Später werden wir die matrixwertigen Algebrodifferentialgleichungen vom Riccati-Typ mit Hilfe dieses Indexbegriffes charakterisieren.

Definition 1.6 (Regulärer und singulärer Traktabilitätsindex). Die DAE (1.1) heißt

- *singulär mit Traktabilitätsindex* $\mu = 0$, falls $G_0 = G_1$ und G_0 singulär ist.
- *regulär mit Traktabilitätsindex* $\mu = 0$, falls $m = k$ und G_0 regulär.

Falls eine Sequenz, wie in Abschnitt 1.2 eingeführt, existiert und folgende Bedingungen für $j \geq 1$ erfüllt sind (jeweils punktweise in den Argumenten)

i. G_j hat konstanten Rang r_j,

ii. $(N_0 + \cdots + N_{j-1}) \ominus ((N_0 + \cdots + N_{j-1}) \cap N_j) \subseteq \ker \mathcal{Q}_j$,

iii. $\mathcal{Q}_j$ stetig,

iv. die partiellen Ableitungen von $D_0 \mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_j D_0^-$ nach $x^{j-1}, \dots, x^1, x$ und t existieren und sind stetig,

v. $G_{\mu-1} \neq G_\mu$ und $G_\mu = G_{\mu+1}$,

heißt (1.1)

- *regulär mit Traktabilitätsindex* μ, falls zusätzlich $m = k$ und G_μ regulär ist.
- *singulär mit Traktabilitätsindex* μ, falls G_μ singulär ist.

Im Folgenden wird die DAE (1.1) *regulär* genannt, falls sie regulär mit Traktabilitätsindex μ ist. Andernfalls heißt sie *singulär*. Wir sagen die DAE (1.1) hat *Index* μ, falls sie singulären oder regulären Traktabilitätsindex μ hat.

Auch für DAEs der Form (1.1) ist sowohl der reguläre als auch der singuläre Traktabilitätsindex unabhängig von der speziellen Wahl der jeweils zulässigen Projektoren. Mit der folgenden Bemerkung wird gezeigt, dass es zur Überprüfung auf singulären und regulären Traktabilitätsindex μ genügt, die Elemente der Matrixkette für alle $j \leq \mu$ zu konstruieren.

Bemerkung 1.7. Für die DAE (1.1) existiere eine Matrixkette, sodass die folgenden Bedingungen für ein $\mu \in \mathbb{N}$ und für alle $1 \leq j \leq \mu$ erfüllt sind.

i. G_j hat konstanten Rang r_j,

ii. $(N_0 + \cdots + N_{j-1}) \ominus ((N_0 + \cdots + N_{j-1}) \cap N_j) \subseteq \ker \mathcal{Q}_j$,

iii. $\mathcal{Q}_j$ stetig,

iv. die partiellen Ableitungen von $D_0 \mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_j D_0^-$ nach $x^{j-1}, \dots, x^1, x$ und t existieren und sind stetig,

v. $G_{\mu-1} \neq G_\mu$ und $G_\mu = G_{\mu+1}$.

Dann ist die DAE (1.1) regulär oder singulär mit Traktabilitätsindex μ.

Beweis. Es existiere eine Matrixkette, sodass für die DAE (1.1) die Bedingungen i bis v aus Bemerkung 1.7 erfüllt sind. Dann gilt $G_\mu = G_{\mu+1}$, $B_\mu \mathcal{Q}_\mu = 0$ und $N_\mu = N_{\mu+1}$, aufgrund von v aus Bemerkung 1.7. Nun kann die Kette für $j \geq \mu$ so fortgeführt werden, dass die Bedingungen für alle $j \geq 1$ gelten.

1. Es sei $j = \mu$. Mit $\mathcal{Q}_\mu := \mathcal{Q}_{\mu+1}$ ergibt sich für $\mu + 1$

$$D_0\mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_\mu D_0^- = D_0\mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_{\mu+1} D_0^-, \quad \mathrm{Diff}_\mu = \mathrm{Diff}_{\mu+1}.$$

Es ist $\mathcal{P}_\mu \mathcal{Q}_{\mu+1} = (I - \mathcal{Q}_\mu)\, \mathcal{Q}_\mu = 0$ und daher folgt

$$\begin{aligned} B_{\mu+1}\mathcal{Q}_{\mu+1} &= B_\mu \mathcal{P}_\mu \mathcal{Q}_{\mu+1} - G_{\mu+1} D_0^- \,\mathrm{Diff}_\mu\, D_0 \mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_\mu \mathcal{Q}_{\mu+1} \\ &= 0, \\ G_{\mu+2} &= G_{\mu+1}. \end{aligned}$$

Weiterhin existiert (vgl. Voraussetzung ii) ein $X_\mu \subseteq \ker \mathcal{Q}_\mu \subseteq \mathbb{R}^m$ mit

$$\begin{aligned} (N_0 + \dots + N_{\mu-1}) &= X_\mu \oplus ((N_0 + \dots + N_{\mu-1}) \cap N_\mu) \\ \to X_\mu &= (N_0 + \dots + N_{\mu-1}) \ominus ((N_0 + \dots + N_{\mu-1}) \cap N_\mu). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} X_\mu \oplus N_\mu &= N_0 + \dots + N_{\mu-1} + N_\mu \\ \to (N_0 + \dots + N_\mu) \ominus N_\mu &= X_\mu \subseteq \ker \mathcal{Q}_\mu. \end{aligned}$$

Mit $N_{\mu+1} = N_\mu \subseteq N_0 + \dots + N_\mu$ und $(N_0 + \dots + N_\mu) \cap N_{\mu+1} = N_{\mu+1} = N_\mu$ folgt nun

$$\begin{aligned} (N_0 + \dots + N_\mu) &\ominus ((N_0 + \dots + N_\mu) \cap N_{\mu+1}) \\ &= (N_0 + \dots + N_\mu) \ominus N_\mu \\ &= X_\mu \subseteq \ker \mathcal{Q}_\mu = \ker \mathcal{Q}_{\mu+1}. \end{aligned}$$

Die Bedingungen sind daher auch für $j = \mu + 1$ erfüllt.

2. Die Bedingungen i bis v aus Definition 1.6 seien für ein $j > \mu$ erfüllt. Dann ist $G_j = G_{j+1}$. Zeige nun, dass dann die Bedingungen i bis v aus Definition 1.6 für $j + 1$ erfüllt sind.

   Mit $G_j = G_{j+1}$ gilt auch $N_j = N_{j+1}$, $B_j\mathcal{Q}_j = 0$ und wir können $\mathcal{Q}_{j+1} := \mathcal{Q}_j$ setzen. Dann ist $D_0\mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_j D_0^- = D_0\mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_j \mathcal{P}_{j+1} D_0^-$ und damit $\mathrm{Diff}_j = \mathrm{Diff}_{j+1}$. Mit $\mathcal{P}_j\mathcal{Q}_{j+1} = (I - \mathcal{Q}_j)\, \mathcal{Q}_j =$ folgt dann auch

$$\begin{aligned} &B_{j+1}\mathcal{Q}_{j+1} = B_j \mathcal{P}_j \mathcal{Q}_{j+1} - G_{j+1} D_0^- \,\mathrm{Diff}_j\, D_0\mathcal{P}_0 \dots \mathcal{P}_j \mathcal{Q}_{j+1} = 0, \\ &G_{j+2} = G_{j+1},\ N_{j+2} = N_{j+1} \text{ und} \\ &\exists X_j \subseteq \ker \mathcal{Q}_j : X_j = (N_0 + \dots + N_{j-1}) \ominus ((N_0 + \dots + N_{j-1}) \cap N_j) \\ &\qquad \to X_j \oplus N_j = N_0 + \dots + N_{j-1} + N_j. \end{aligned}$$

   Es folgt nun

$$\begin{aligned} (N_0 + \dots + N_j) &\ominus ((N_0 + \dots + N_j) \cap N_{j+1}) \\ &= (N_0 + \dots + N_j) \ominus N_j \\ &= X_j \subseteq \ker \mathcal{Q}_j = \ker \mathcal{Q}_{j+1}. \end{aligned}$$

   Die Bedingungen sind daher auch für $j + 1$ erfüllt.

$\rightarrow$ Die Bedingungen i bis v aus Definition 1.6 sind für alle $j \geq 1$ erfüllt. $\square$

Lemma 1.8 (Index $\mu = 1$). *Die DAE* (1.1) *hat Index* $\mu = 1$ *genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind*

i. $G_1(x,t)$ *hat konstanten Rang* r_1 *auf* $\mathcal{D} \times \mathcal{I}$,

ii. $N_0(t) \ominus (N_0(t) \cap N_1(x,t)) \subseteq \ker \mathcal{Q}_1(x,t)\ \ \forall x \in \mathcal{D},\ \forall t \in \mathcal{I}$,

iii. $\mathcal{Q}_1(x,t)$ *stetig auf* $\mathcal{D} \times \mathcal{I}$,

iv. die partiellen Ableitungen

$$\left[D_0(t)\mathcal{P}_0(t)\mathcal{P}_1(x,t)D_0^-(t)\right]_x \qquad \textit{und} \qquad \left[D_0(t)\mathcal{P}_0(t)\mathcal{P}_1(x,t)D_0^-(t)\right]_t$$

existieren auf $\mathcal{D} \times \mathcal{I}$ *und sind dort stetig und*

v. $G_0(t) \neq G_1(x,t)$ *und* $G_1(x,t) = G_2\left(x^1,x,t\right),\ \forall x^1 \in \mathbb{R}^m,\ \forall x \in \mathcal{D},\ \forall t \in \mathcal{I}$.

Beweis. ($\longleftarrow$) Folgt sofort aus Bemerkung 1.7.
($\longrightarrow$) Folgt sofort aus der Definition 1.6. $\square$

Lemma 1.9 (Traktabilitätsindex linearer DAEs). *Für lineare DAEs mit regulärem Traktabilitätsindex* $\mu \geq 0$ *bzw. singulärem Traktabilitätsindex* $\mu = 1$ *sind die Definitionen 1.4 und 1.6 äquivalent.*

Beweis. Aus den Betrachtungen der Matrixkette für lineare DAEs in Abschnitt 1.3 wird die Äquivalenz klar. $\square$

Satz 1.10 (Traktabilitätsindex der Linearisierung). *Die DAE* (1.1) *habe Index 1. Dann hat jede Linearisierung von* (1.1) *längs einer Funktion* $x_L \in C^1(\mathcal{I}_L, \mathbb{R}^m)$, $\mathcal{I}_L \subseteq \mathcal{I}$, *ebenfalls Index 1.*

Für reguläre DAEs gilt sogar: Jede Linearisierung (1.8) *von* (1.1) *längs einer Funktion* $x_L \in C^1_{D_0}(\mathcal{I}_L, \mathbb{R}^m)$ *hat regulären Traktabilitätsindex 1 genau dann, wenn die DAE* (1.1) *regulär mit Traktabilitätsindex 1 ist.*

Beweis. 1. Fall Für reguläre DAEs wurde die Aussage in [Mär02a] bewiesen.

2. Fall Die DAE (1.1) sei singulär mit Traktabilitätsindex 1. Dann gelten die Bedingungen aus Definition 1.6. Wir werfen nun einen Blick auf die Linearisierung längs einer fixierten Funktion $x_L \in C^1(\mathcal{I}_L, \mathbb{R}^m)$. Dann gilt für $t \in \mathcal{I}_L$

i. $G_{L1}(t) = G_1(x_L(t), t)$
$\rightarrow r_{L1} = \operatorname{rg} G_{L1}(t) = \operatorname{rg} G_1(x_L(t), t) = r_1$ konstant auf $\mathcal{I}_L$,

ii. $$N_{L0}(t) \ominus (N_{L0}(t) \cap N_{L1}(x_L(t),t)) = N_0(t) \ominus (N_0(t) \cap N_1(x_L(t),t)) \subseteq \ker \mathcal{Q}_1(x_L(t),t) = \ker \mathcal{Q}_{L1}(t),$$

iii. $Q_{L1}(t) = Q_1(x_L(t), t)$ ist stetig in $t \in \mathcal{I}_L$,

iv. $D_{L0}\mathcal{P}_{L0}\mathcal{P}_{L1}D_{L0}^-(t) = D_0\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1D_0^-(x_L(t), t)$ ist stetig differenzierbar nach t,

v. $G_{L0}(t) = G_0(t) \neq G_1(x_L(t), t) = G_{L1}(t)$ ist singulär.

$\rightarrow$ Alle Linearisierungen der singulären DAE (1.1) mit Traktabilitätsindex 1 längs einer Funktion $x_L \in C^1(\mathcal{I}_L, \mathbb{R}^m)$, erfüllen die Bedingungen aus Definition 1.4 für singuläre, lineare DAEs mit Traktabilitätsindex 1.

$\square$

Bemerkung 1.11 (Äquivalente Aussagen für reguläre DAEs). Es sei $m = k$, dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

1. Die DAE (1.1) ist regulär mit Traktabilitätsindex 1.
2. $G_1(x,t)$ hat auf $\mathcal{D} \times \mathcal{I}$ konstanten Rang $r_1 = m$ und $\operatorname{rg} G_0(t) = r_0 < r_1 = m$ auf $\mathcal{I}$.
3. $N_0(t) \cap S_0(x,t) = \{0\}$, $x \in \mathcal{D}$, $t \in \mathcal{I}$ und $\operatorname{rg} G_0(t) = r_0 < m$ auf $\mathcal{I}$.

Beweis. In den folgenden Ausführungen werden die Argumente, der Übersichtlichkeit halber, weggelassen. Alle Koeffizienten werden punktweise betrachtet.
Es sei nun $m = k$. Es wird nacheinander gezeigt $(1. \rightarrow 2.)$, $(2. \rightarrow 3.)$, $(3. \rightarrow 1.)$.

(1. $\rightarrow$ 2.) Die DAE (1.1) habe regulären Traktabilitätsindex 1. Dann sind die Bedingungen aus Definition 1.6 erfüllt. Und es folgt G_1 hat konstanten Rang $r_1 = m$. Außerdem gilt laut Voraussetzungen $G_1 = G_0 + B_0\mathcal{Q}_0 \neq G_0$.

Angenommen es wäre $m = \operatorname{rg} G_0$. Dann ist $N_0 = \{0\}$ und es folgt $\mathcal{Q}_0 = 0$. Dann wäre $B_0\mathcal{Q}_0 = 0$ und somit $G_1 = G_0$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung und daher ist $m = r_1 > r_0$.

(2. $\rightarrow$ 3.) Die Voraussetzungen von 2. seien erfüllt. Insbesondere gilt $r_0 < r_1$ und G_1 ist regulär.

Nach Lemma A.3 gilt G_1 ist regulär $\leftrightarrow N_0 \cap S_0 = \{0\}$.

(3. $\rightarrow$ 1.) Es sei $N_0 \cap S_0 = \{0\}$.

i. $N_0 \cap S_0 = \{0\} \leftrightarrow G_1$ ist regulär (Lemma A.3).
$\rightarrow N_1 = \{0\}$, $\mathcal{Q}_1 = 0$, $\ker \mathcal{Q}_1 = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{P}_1 = I_m$
$\rightarrow N_0 \ominus (N_0 \cap N_1) = N_0 \subseteq \mathbb{R}^m = \ker \mathcal{Q}_1$,

ii. $0 = \mathcal{Q}_1 \in C(\mathcal{I}, L(\mathbb{R}^m))$,

iii. $D_0\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1 D_0^- = D_0\left(D_0^- D_0\right) I_m D_0^- = D_0 D_0^- = \mathcal{R} \in C^1(\mathcal{I}, L(\mathbb{R}^n))$
$\rightarrow D_0\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1 D_0^-$ ist unabhängig von x und stetig differenzierbar nach t.

iv. $\operatorname{rg} G_0 = r_0 < m = r_1 \quad \rightarrow \quad G_0 \neq G_1$,

v. G_1 regulär $\quad \rightarrow \quad \mathcal{Q}_1 = 0$ und daher $G_2 = G_1 + B_1\mathcal{Q}_1 = G_1$

$\xrightarrow{\text{Lemma 1.8}}$ Die DAE (1.1) hat regulären Traktabilitätsindex 1.

$\square$

Für reguläre DAEs der Form (1.1) ist daher die bekannte Definition des Traktabilitätsindexes 1 für nichtlineare DAEs $N_0(t) \cap S_0(x,t) = 0$ für $x \in \mathcal{D}$, $t \in \mathcal{I}$ (u. a. [Mär01c]) äquivalent mit der Definition 1.6 des regulären Traktabilitätsindexes 1.

Der folgende Satz garantiert eindeutige Lösungen für reguläre DAEs mit Traktabilitätsindex 1. Dabei bezeichnet $\|.\|_\infty$ die Maximum-Norm auf dem kompakten Intervall $\mathcal{I}_* \subseteq \mathcal{I}$.

Satz 1.12 (Lösbarkeit von DAEs mit regulärem Traktabilitätsindex 1). *Die DAE* (1.1) *sei regulär mit Traktabilitätsindex 1. Dann gilt*

1. *Für jedes* $t_0 \in \mathcal{I}$, $x_0 \in \mathcal{M}_0(t_0)$ *führt genau eine Lösung von* (1.1) *durch* (x_0, t_0).
2. *Sei* $x_* \in C^1_{D_0}(\mathcal{I}_*, \mathbb{R}^m)$ *Lösung von* (1.1), $\mathcal{I}_* \subseteq \mathcal{I}$ *kompakt,* $t_0 \in \mathcal{I}_*$, *dann sind alle gestörten AWA*
$$A_0(t)(D_0(t)x(t))' + b(x(t), t) = q(t), \quad D_0(t_0)\left(x(t) - x^0\right) = 0, \tag{1.9}$$
mit $x^0 \in \mathbb{R}^m, q \in C(\mathcal{I}_*, \mathbb{R}^m)$ *eindeutig lösbar in* $C^1_{D_0}(\mathcal{I}_*, \mathbb{R}^m)$, *falls die Störungen* $\left\|D_0(t_0)\left(x^0 - x_*(t_0)\right)\right\|$ *und* $\|q\|_\infty$ *ausreichend klein sind.*
3. *Für die Lösung* $x(.)$ *von* (1.9) *und eine Konstante* κ *gilt*
$$\|x - x_*\|_\infty \leq \kappa \left\{\|D_0(t_0)(x(t_0) - x_*(t))\| + \|q\|_\infty\right\}$$

Beweis. [HM00] □

Solche Aussagen sind für singuläre DAEs leider nicht möglich. Anhand von Beispielen wird nun der Unterschied zwischen regulären und singulären DAEs mit Traktabilitätsindex 0 oder 1 im Hinblick auf ihre Lösbarkeit verdeutlicht.

1.5 Beispiele

Um die Problematik der Lösbarkeit von Algebrodifferentialgleichungen zu veranschaulichen, betrachten wir einige einfache Beispiele. Insbesondere der Unterschied im Verhalten von regulären und singulären DAEs wird dabei deutlich. Alle Argumente sind jeweils punktweise in $t \in \mathcal{I} = \mathbb{R}$ zu verstehen.

Beispiel 1. 1. Es sei $m = k = n = 2$. Die implizite, reguläre gewöhnliche Differentialgleichung
$$\begin{cases} x_1' & +x_2 = q_1 \\ x_1' + x_2' & = q_2 \end{cases} \tag{1.10}$$
erhält mit
$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} x_2 - q_1 \\ -q_2 \end{pmatrix}$$
die Form (1.1). Damit ergibt sich
$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ regulär,} \qquad \mathcal{Q}_0 = 0$$
und es folgt $G_1 = G_0 + B_0\mathcal{Q}_0 = G_0$.

Die Gleichung ist regulär mit Traktabilitätsindex 0.

2. Wir betrachten nun das System (1.10) und fügen eine weitere Gleichung
$$a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_1 + a_4x_2 = q_3,$$
mit $a_1, a_2, a_3, a_4, q_3 \in \mathbb{R}$ beliebig und fixiert, hinzu. Es ist nun $k = 3,\ n = m = 2$. Die Differentialgleichung
$$\begin{cases} x_1' & & & & + & x_2 & = q_1 \\ x_1' & + & x_2' & & & & = q_2 \\ a_1x_1' & + & a_2x_2' & + & a_3x_1 & + & a_4x_2 & = q_3 \end{cases}$$
erhält mit
$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} x_2 - q_1 \\ -q_2 \\ a_3x_1 + a_4x_2 - q_3 \end{pmatrix}$$
die Form (1.1). Damit ergibt sich
$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \qquad G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix},$$
$$\operatorname{rg} G_0 = 2, \qquad \mathcal{Q}_0 = 0$$
und es folgt $G_1 = G_0 + B_0\mathcal{Q}_0 = G_0$.

Die Gleichung ist singulär mit Traktabilitätsindex 0.

3. Es wird nun jeweils eine Gleichung entfernt.
   a) Untersucht man die zweite Gleichung von (1.10) als eigenständige DAE, so hat diese ebenfalls singulären Traktabilitätsindex 0
   $$x_1' + x_2' = q_2.$$
   Es ist nämlich
   $$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   b) Wird dagegen die zweite Gleichung des Systems (1.10) weggelassen, erhält man eine Algebrodifferentialgleichung mit singulärem Traktabilitätsindex 1
   $$x_1' + x_2 = q_1.$$
   Es ist dabei
   $$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \qquad D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   $$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Es folgt
   $$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \neq G_0, \qquad \mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
   $$B_1 = B_0\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = G_1.$$

Beispiel 2. Für das System

$$\begin{cases} x_1' & = q_1 \\ & x_1^2 = q_2 \end{cases}$$

ist $m = 1,\ n = 1,\ k = 2$ und mit $A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ und $B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$ folgt

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix},\ B_0\mathcal{Q}_0 = 0$$

und damit ist

$$G_1 = G_0 + B_0\mathcal{Q}_0 = G_0 \text{ singulär.}$$

$\rightarrow$ Die DAE ist singulär mit Traktabilitätsindex 0.

Um mehr über die Lösbarkeit zu erfahren, wird nun der geometrische Ort der Lösungen untersucht. Es ergibt sich

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \middle| \ 0 = x_1^2 - q_2 \right\}.$$

$\mathcal{M}_0$ ist für $q_2 < 0$ leer, daher ist die DAE in diesem Fall nicht lösbar.

Beispiel 3. Für das System

$$\begin{cases} x_1' & & & = & q_1 \\ x_2' & + & x_1 & = & q_2 \\ x_3' & + & x_2 & = & q_3 \\ & & x_3 & = & q_4 \end{cases}, \qquad m = 3, \quad k = n = 4$$

mit

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$r_0 = 3, \quad N_0 = \{0\}, \quad \mathcal{Q}_0 = 0, \qquad \mathcal{M}_0 = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x_3 = q_4 \right\}.$$

Damit ist $G_1 = G_0 + B_0\mathcal{Q}_0 = G_0$ und die DAE hat singulären Traktabilitätsindex 0.

Beispiel 4. [Mär02b] Für das System

$$\begin{cases} t\,(-x_1 + tx_2)' & +x_1 - tx_2 & = q_1 \\ (-x_1 + tx_2)' & & = q_2 \end{cases}, \qquad m = k = 2,\ n = 1$$

mit

$$A_0 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad D_0 = \begin{pmatrix} -1 & t \end{pmatrix},$$

folgt

$$\begin{aligned}
G_0 &= \begin{pmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{pmatrix}, & N_0 &= \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \middle| z_1 = tz_2 \right\}, \\
\mathcal{Q}_0 &= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 1/t \end{pmatrix}, & B_0 &= \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathcal{M}_0 &= \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \middle| x_1 - tx_2 = q_1 - tq_2 \right\}, \\
\text{und } G_1 &= \begin{pmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 1/t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{pmatrix} = G_0 \text{ ist singulär.}
\end{aligned}$$

Das System hat singulären Traktabilitätsindex 0.

Jede Funktion $x(t) = \begin{pmatrix} t\gamma(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathcal{I}$, löst die homogene Gleichung. Dabei ist $\gamma(t) \in C(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ beliebig wählbar. Falls q die Bedingung $tq_2(t) - q_1(t) = -x_1(0) + \int_0^t q_2(s)\,ds$ erfüllt, hat das inhomogene Problem mindestens eine Lösung [Mär01b].

Beispiel 5. 1. Die Algebrodifferentialgleichung

$$\begin{cases} x_1' \quad\quad + x_2 = q_1 \\ \quad\; x_1 + x_2 = q_2 \end{cases}, \qquad m = k = 2,\ n = 1$$

erhält die Form (1.1) mit $A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$. Weiterhin ist

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und es ist} \qquad G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ regulär.}$$

Die DAE ist regulär mit Traktabilitätsindex 1 und damit eindeutig lösbar.

2. Wir untersuchen das Beispiel noch einmal, fügen aber jetzt eine beliebige Gleichung dem System hinzu. Es sei

$$a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_1 + a_4 x_2 = q_3$$

mit $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ q_3 \in \mathbb{R}$ beliebig und fixiert.

a) Fall $a_2 \neq 0$.

Dann gilt für das neue System

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},$$

sowie

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow G_0 = G_1$.

Dieses System hat singulären Traktabilitätsindex 0.

b) Fall $a_2 = 0$.
Dann gilt für das neue System

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \qquad D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

und

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_0\mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix},$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ a_1 & a_4 \end{pmatrix}, \qquad N_1 = \{0\}.$$

$\rightarrow G_2 = G_1$.

Dieses System hat singulären Traktabilitätsindex 1.

3. Es wird eine Gleichung entfernt.

a) Das System bestehe nun nur aus der ersten Gleichung. Die DAE entspricht der DAE aus Beispiel 1.3b. Diese Gleichung hat singulären Traktabilitätsindex 1.

b) Aus dem System wird die erste Gleichung entfernt. Damit haben wir eine rein algebraische Gleichung.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \qquad D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und es ist

$$G_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{Q}_0 = I_2, \qquad G_1 = B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = B_0\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow G_2 = G_1$.

Die algebraische Gleichung ist daher eine Algebrodifferentialgleichung mit singulärem Traktabilitätsindex 1.

Beispiel 6. Dieses Beispiel wurde bereits in [MW01] auf regulären Traktabilitätsindex untersucht. Eine spezielle Form ($q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0$) wurde in [AP98] analysiert. Es sei $m = k = 3$. Wir betrachten das System

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} x_1' & - \quad\quad\quad\quad\quad\quad x_3 & = & q_1 \\ & x_2\,(1-x_2) & = & q_2 \\ & x_1 x_2 + x_3\,(1-x_2) - t & = & q_3 \end{array} \right.$$

mit $A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Für die Elemente der Matrixkette erhält man

$$\begin{aligned}
D_0^- &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B_0 = b_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-2x_2 & 0 \\ x_2 & x_1 - x_3 & 1-x_2 \end{pmatrix}, \\
G_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
G_1 &= G_0 + B_0 \mathcal{Q}_0 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-2x_2 & 0 \\ x_2 & x_1 - x_3 & 1-x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-2x_2 & 0 \\ 0 & x_1 - x_3 & 1-x_2 \end{pmatrix}, \\
N_1 &= \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} z_1 + z_3 & = & 0 \\ z_2\,(1-2x_2) & = & 0 \\ z_2\,(x_1 - x_3) + (1-x_2)\,z_3 & = & 0 \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Somit ist G_1 für $x_2 \neq 1$ und $x_2 \neq \frac{1}{2}$ regulär und die Bedingungen für regulären Traktabilitätsindex 1 sind erfüllt. Es folgt eine Betrachtung der einzelnen Fälle.

1. Fall Außerhalb der Ebenen $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$ gilt

$$\begin{array}{lr} & N_1 = \{0\} \\ \rightarrow & G_1 \text{ ist regulär}, \; \mathcal{Q}_1 = 0 \\ \rightarrow & B_1 \mathcal{Q}_1 = 0 \\ \rightarrow & G_1 = G_2. \end{array}$$

→ Alle Linearisierungen, die komplett außerhalb der zwei parallelen Ebenen verlaufen, haben regulären Traktabilitätsindex 1.

2. Fall Auf der Ebene $x_2 = 1$ ist

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & x_1 - x_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_1 = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} z_1 + z_3 = 0 \\ z_2 = 0 \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} D_0 \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1 D_0^- &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0, \\ B_1 &= B_0 \mathcal{P}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & x_1 - x_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und} \\ G_2 &= G_1 + B_1 \mathcal{Q}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & x_1 - x_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & x_1 - x_3 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist regulär.} \\ \to G_3 &= G_2 \neq G_1. \end{aligned}$$

$\to$ Alle Linearisierungen, die die Ebene $x_2 = 1$ nicht verlassen, haben regulären Traktabilitätsindex 2.

3. Fall Auf der Ebene $x_2 = \frac{1}{2}$ gilt

$$N_1 = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z_1 + z_3 = 0, \quad z_2 \left(x_1 - x_3\right) + \frac{1}{2} z_3 = 0 \right\},$$

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} 2\left(x_1 - x_3\right) & 2\left(x_1 - x_3\right) & 2\left(x_1 - x_3\right) \\ 1 & 1 & 1 \\ -2\left(x_1 - x_3\right) & -2\left(x_1 - x_3\right) & -2\left(x_1 - x_3\right) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} D_0 \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1 D_0^- &= \left(1 - 2\left(x_1 - x_3\right)\right), \\ \mathrm{Diff}_1 &= -2\left(x_1' - x_3'\right), \\ B_1 &= B_0 \mathcal{P}_0 - G_1 D_0^- \,\mathrm{Diff}_1\, D_0 \mathcal{P}_0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 2\,(x_1' - x_3') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
B_1 Q_1 &\neq 0, \\
G_2 &= G_1 + B_1 Q_1 \\
&\neq G_1.
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ Alle Linearisierungen, die die Ebene $x_2 = \frac{1}{2}$ nicht verlassen, haben Traktabilitätsindex $\mu > 1$ oder es ist dort kein Traktabilitätsindex definiert.

Auf den zwei parallelen Ebenen $x_2 = 1$ und $x_2 = \frac{1}{2}$ sind die Bedingungen für regulären Traktabilitätsindex 1 nicht erfüllt. Jede Linearisierung, die eine der beiden Ebene passiert und zumindest teilweise außerhalb dieser Ebenen verläuft, besitzt singuläre Punkte, an denen ein Indexwechsel stattfindet.

Jede Lösung der Gleichung ist Element der Menge $\mathcal{M}_0$. Um Aussagen über die Existenz der Lösung zu treffen, untersuchen wir nun diese Menge. Es ist

$$
\mathcal{M}_0 = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - q_2} \\ x_1 x_2 + x_3\,(1 - x_2) = q_3 \end{array} \right\}.
$$

1. Fall $q_2 > \frac{1}{4}$

$$
\mathcal{M}_0 = \emptyset.
$$

2. Fall $q_2 = \frac{1}{4}$

$$
\mathcal{M}_0 = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\,(x_1 + x_3) = q_3 \right\}.
$$

3. Fall $q_2 < \frac{1}{4}$

Jetzt setzt sich die Restriktionsmenge aus zwei disjunkten Teilmengen zusammen. Es ist $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0^+ \cup \mathcal{M}_0^-$, wobei

$$
\mathcal{M}_0^+ = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - q_2}, \\ \frac{1}{2}\,(x_1 + x_3) + (x_3 - x_2)\sqrt{\frac{1}{4} - q_2} = q_3 \end{array} \right\}
$$

und

$$
\mathcal{M}_0^- = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - q_2}, \\ \frac{1}{2}\,(x_1 + x_3) + (x_2 - x_3)\sqrt{\frac{1}{4} - q_2} = q_3 \end{array} \right\}.
$$

Für die Lösungen aus $\mathcal{M}_0^+$ sind die Bedingungen für regulären Traktabilitätsindex 1 erfüllt. Für die Lösungen aus $\mathcal{M}_0^-$ hängt dies weiterhin von q_2 ab. Zum Beispiel ist $\mathcal{M}_0^-$ für $q_2 = 0$ ganz in der Ebene $x_2 = 1$ enthalten.

Beispiel 7. Das System

$$
\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1' & - & C_{13} x_3 & = & q_1 \\ & - & x_2 & = & q_2 \\ & & 0 & = & q_3 \end{array} \right.
$$

stammt aus [BKM03]. Die homogene Variante entspricht der in [KM97] vorgestellten kanonischen Form. Es sei nun C_{13} singulär und $\operatorname{im} C_{13} =$ konstant. Die Matrixkette hat die Gestalt

$$A_0 = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -C_{13} \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_0^- = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} G_1 &= G_0 + B_0 \mathcal{Q}_0 \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 & -C_{13} \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} C_{13}C_{13}^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^- & 0 & I - C_{13}^- C_{13} \end{pmatrix}, \\ N_0 &= \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \middle| \, z_1 = 0 \right\}, \quad N_1 = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \middle| \, z_1 - C_{13} z_3 = 0, \ z_2 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x_2 = q_2, \ 0 = q_3 \right\} \\ \rightarrow \quad & \mathcal{M}_0 = \emptyset, \text{ falls } q_3 \neq 0. \end{aligned}$$

Betrachte

$$\begin{aligned} N_0 \ominus (N_0 \cap N_1) &= \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \middle| \, z_1 = 0 \right\} \ominus \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \middle| \, z_1 = z_2 = 0, \quad C_{13} z_3 = 0 \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \middle| \, z_1 = 0, \quad \left(I - C_{13}^- C_{13}\right) z_3 = 0 \right\} \\ &\subseteq \ker \mathcal{Q}_1, \\ D_0 \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1 D_0^- &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - C_{13} C_{13}^- \\ 0 \\ -C_{13}^- \end{pmatrix} \\ &= I - C_{13} C_{13}^-, \\ B_1 &= B_0 \mathcal{P}_0 - G_0 D_0^- \left[D_0 \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1 D_0^- \right]_t D_0 \mathcal{P}_0. \end{aligned}$$

Da $\operatorname{im} C_{13} =$ konstant ist, ist $B_1 = 0$. Es folgt $G_1 = G_2$ und die DAE ist singulär mit Traktabilitätsindex 1. Als Lösungen kommen für x_3 alle stetigen Funktionen in Frage. x_1 lässt sich dann entsprechend - jedoch nicht eindeutig - wählen. Für die Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung ist die Konsistenzbedingung $q_3 = 0$ zu erfüllen.

Beispiel 8. Schließlich wenden wir uns dem System

$$\begin{cases} 0 = q_1 \\ (x_1 + x_2)' + x_1 = q_2 \end{cases}, \quad m = k = 2, \ n = 1,$$

in der Form

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)' + \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}.$$

zu. Die zugehörigen Matrizen und Unterräume sind dann

$$\begin{aligned}
A_0 &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, & B_0 &= \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\\
D_0 &= \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}, & D_0^- &= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix},\\
G_0 &= \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, & N_0 &= \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \middle| \, z_1 + z_2 = 0 \right\},\\
\mathcal{Q}_0 &= \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}, & &\\
G_1 &= \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix} & &\\
&= \begin{pmatrix}0 & 0\\2 & 2\end{pmatrix}, & &\\
N_1 &= \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 2z_1 + z_2 = 0 \right\}. & &
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_0 &= \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \middle| \, q_1 = 0 \right\}\\
&= \emptyset, \text{ falls } q_1 \neq 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_1 &= \begin{pmatrix}-1 & -1\\2 & 2\end{pmatrix},\\
\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1 &= \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\-2 & -1\end{pmatrix} = 0,\\
\ker \mathcal{Q}_1 &= \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \middle| \, z_1 = -z_2 \right\},\\
N_0 \ominus (N_0 \cap N_1) &= N_0 \subseteq \ker \mathcal{Q}_1,\\
B_1 = B_0\mathcal{P}_0 &= \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\ker B_1 = \mathbb{R}^2, \quad G_2 = G_1, \quad r_0 = r_1 = r_2 = 1$$

und die DAE ist singulär mit Traktabilitätsindex 1.

Zum Abschluss fassen wir die Erkenntnisse, die wir aus der Analyse der Beispiele gewonnen haben, zusammen. Als erstes wenden wir uns den *nichtlinearen* Systemen zu. Beispiel 2 ist aufgrund der Struktur singulär. Im 6. Beispiel haben nicht alle Linearisierungen denselben Traktabilitätsindex. Es ergibt sich also, je nach Wahl der Linearisierung, ein spezieller Index. Diese DAE besitzt singuläre Punkte. Sie ist nicht regulär.

Jetzt betrachten wir die *linearen* Systeme und blicken zunächst auf die Beispiele 1 und 5. Ausgangspunkt der Analysen war jeweils eine reguläre DAE mit Traktabilitätsindex 0 oder 1. Während die Anzahl der Variablen konstant gehalten wurde, entstanden durch Entfernen bzw. Hinzufügen von Gleichungen neue Systeme. Diese waren aufgrund ihrer Struktur singulär ($m \neq k$). Ein System mit $m < k$ wird *formal überbestimmt* genannt. Falls $m > k$ ist, heißt es *formal unterbestimmt*. Allerdings lässt sich dadurch keine Aussage über die Lösbarkeit treffen. Einerseits sind singuläre System eventuell nicht lösbar. Dann können möglicherweise zusätzliche Konsistenzbedingungen aufgestellt werden, um Lösbarkeit sicherzustellen. Andererseits sind sie oft nicht eindeutig lösbar.

$m < k$ Durch das Hinzufügen von Gleichungen zu regulären DAEs, konnten wir anhand von Beispielen feststellen, das formal überbestimmte, singuläre Systeme von DAEs entstehen. In Beispiel 1 entstand durch Hinzufügen einer Gleichung zu der regulären Index-1-DAE eine singuläre DAE mit Traktabilitätsindex 0. Wurde dagegen eine Gleichung zu dem regulären Index-1-System von Beispiel 5 hinzugefügt, entstand eine singuläre DAE, die abhängig von der neuen Gleichung Traktabilitätsindex 0 oder 1 hat.

$m > k$ Ein anderes Bild ergab sich beim Entfernen von Gleichungen. Es entstanden hier, wie wir an den Beispielen beobachten konnten, unterbestimmte Systeme von singulären DAEs. So entstand im 1. Beispiel, in Abhängigkeit von der entfernten Gleichung, eine singuläre DAE mit Traktabilitätsindex 0 oder 1. Dagegen ist jede einzelne Gleichung der regulären Index-1-DAE aus Beispiel 5 singulär mit Traktabilitätsindex 1.

Anhand der Ergebnisse können wir vermuten, dass beim Entfernen einer Gleichung aus einem System mit Index μ - ohne dass die Anzahl der Variablen verändert wird - eine DAE entsteht, die Index μ oder höher hat. Dagegen konnten wir beim Hinzufügen von Gleichungen zu einer DAE mit Index μ beobachten, dass die resultierende DAE Index μ oder niedriger hat.

Wir wenden uns nun den Beispielen 3, 4, 6, 7 und 8 zu. Es wurde jeweils ein System betrachtet und nicht weiter verändert.

$m < k$ Das Beispiel 3 ist formal überbestimmt. Eventuell ist es möglich durch Entfernen einzelner Gleichungen eine reguläre DAE mit derselben Lösungsmenge zu erhalten. Falls dies nicht möglich ist, werden Konsistenzbedingungen benötigt um die Lösbarkeit der DAE zu garantieren und/oder zusätzliche Bedingungen um die DAE zu einer regulären Gleichung zu vervollständigen.

$m = k$ Bei solchen Beispielen, zu denen auch die Beispiele 4, 6, 7 und 8 gehören, kann man allein anhand der Dimensionen nicht erkennen, ob es sich um singuläre DAEs handelt. Singuläre Gleichungen dieses Typs beinhalten entweder überflüssige Gleichungen oder Konsistenzbedingungen und sind im Allgemeinen nicht eindeutig lösbar.

Anhand von Beispiel 4 kann man erkennen, dass Aussagen über die Lösbarkeit von singulären DAEs im Allgemeinen nicht möglich sind. Die homogene Gleichung besitzt einen unendlichen Lösungsraum. Daher kann keine Anfangswertaufgabe eindeutig gelöst werden. Um eine solche Gleichung in eine reguläre DAE umwandeln zu können, müsste man zusätzlich Bedingungen einführen und überflüssige Gleichungen entfernen.

2 Optimalsteuerungsprobleme mit gesteuerten Algebrodifferentialgleichungen und Riccati-Transformation

Mit dem Beginn der Entwicklung der Theorie von DAEs begann die Untersuchung von optimalen Steuerungsaufgaben mit gesteuerten DAEs (u. a. [Mär01a], [BKM03], [KM97], [Kur93]).

Dieses Kapitel befasst sich mit der Formulierung solcher Probleme und deren Riccati-Transformation. Ausgehend von Optimalsteuerungsproblemen mit gesteuerten DAEs werden die so genannten Optimalitäts-DAEs formuliert und analysiert. Die in [BKM03] hergeleiteten Bedingungen für regulären Traktabilitätsindex 1 der Optimalitäts-DAE werden zitiert.

Schließlich wird eine Riccati-Transformation vorgestellt. In [KM90], [KM97], [Kur00] wurden bereits matrixwertige Riccati-Typ DAEs betrachtet. Die neue Formulierung mit properem Hauptterm und die in [BKM03] hergeleiteten Bedingungen für regulären Traktabilitätsindex 1 rechtfertigen nun eine erneute Analyse dieser Gleichungen. Die Eigenschaften dieser MR-DAEs werden im 3. Kapitel genauer analysiert.

Das quadratisches Gütefunktional

$$\begin{aligned} J\left(u,x\right) := {} & \frac{1}{2}\left\langle x\left(T\right), Vx\left(T\right)\right\rangle \\ & + \frac{1}{2}\int_0^T \left\langle \begin{pmatrix} x\left(t\right) \\ u\left(t\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W\left(t\right) & S\left(t\right) \\ S\left(t\right)^T & \widetilde{R}\left(t\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\left(t\right) \\ u\left(t\right) \end{pmatrix} \right\rangle dt \end{aligned} \tag{2.1}$$

soll auf der Menge der Lösungen der linearen Algebrodifferentialgleichung

$$A\left(t\right)\left(B\left(t\right)x\left(t\right)\right)' = C\left(t\right)x\left(t\right) + D\left(t\right)u\left(t\right) \tag{2.2}$$

unter der Anfangsbedingung

$$A\left(0\right)B\left(0\right)x\left(0\right) = y_0 \tag{2.3}$$

minimiert werden. Es sei $t \in \mathcal{I} := [0, T]$ und $T \in \mathbb{R}^{>0}$ fixiert. Die Koeffizienten in (2.1), (2.2) und (2.3) sind die von $t \in \mathcal{I}$ stetig abhängigen Matrizen

$$\begin{aligned} A\left(t\right) &\in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right), & x\left(t\right) &\in \mathbb{R}^m, \\ B\left(t\right) &\in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right), & u\left(t\right) &\in \mathbb{R}^l, \\ C\left(t\right) &\in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k\right), & D\left(t\right) &\in L\left(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k\right), \\ W\left(t\right) &\in L\left(\mathbb{R}^m\right), & \widetilde{R}\left(t\right) &\in L\left(\mathbb{R}^l\right), \\ S\left(t\right) &\in L\left(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m\right) \end{aligned}$$

und die konstante Matrix $V \in L\left(\mathbb{R}^m\right)$. Weiterhin seien $\left(\begin{smallmatrix} W(t) & S(t) \\ S(t)^T & \widetilde{R}(t) \end{smallmatrix}\right) \in L\left(\mathbb{R}^{m+l}, \mathbb{R}^{m+l}\right)$ und V positiv semidefinit. $W\left(t\right), \widetilde{R}\left(t\right)$ und V seien symmetrisch.

Definition 2.1. ([BKM03]) Eine stetige Funktion $u : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^l$, heißt *zulässige Steuerung* falls das zugehörige Anfangswertproblem (2.2) und (2.3) eine Lösung besitzt.

Die gesteuerte Algebrodifferentialgleichung (2.2) nennen wir *quadratisch*, falls $m = k$.

2.1 Optimalitäts-DAE

In [BKM03] wird die Optimalitäts-Randwertaufgabe in der Form

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} A(t)(B(t)x(t))' \\ -B^T(t)\left(A^T(t)\psi(t)\right)' \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C(t) & 0 & D(t) \\ W(t) & C^T(t) & S(t) \\ S^T(t) & D^T(t) & \widetilde{R}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \\ A(0)B(0)x(0) &= y_0 \\ B(T)^T A(T)^T \psi(T) &= Vx(T), \quad t \in \mathcal{I} \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

eingeführt. Die Optimalitäts-DAE (2.4) hat dabei die Gestalt

$$\hat{A}(t)\left(\hat{B}(t)\hat{x}(t)\right)' = \hat{C}(t)\hat{x}(t), \quad t \in \mathcal{I} \tag{2.5}$$

mit $m+k+l = \hat{m} = \hat{k}$, $\hat{n} = 2n$ und für $t \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) &= \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & B^T(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^{\hat{n}}, \mathbb{R}^{\hat{k}}\right), \\ \hat{B}(t) &= \begin{pmatrix} B(t) & 0 & 0 \\ 0 & -A^T(t) & 0 \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^{\hat{m}}, \mathbb{R}^{\hat{n}}\right), \\ \hat{x}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\hat{m}}, \\ \hat{C}(t) &= \begin{pmatrix} C(t) & 0 & D(t) \\ W(t) & C^T(t) & S(t) \\ S^T(t) & D^T(t) & \widetilde{R}(t) \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^{\hat{m}}, \mathbb{R}^{\hat{k}}\right). \end{aligned}$$

Lemma 2.2. *Die quadratische, homogene Algebrodifferentialgleichung* (2.5) *hat einen proper formulierten Hauptterm genau dann, wenn die gesteuerte Algebrodifferentialgleichung* (2.2) *proper formuliert ist.*

Beweis. (2.5) sei proper formuliert. Dann ist (jeweils punktweise in $t \in \mathcal{I}$)

$$\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \operatorname{im} B, \ \operatorname{im} \mathcal{R} = \operatorname{im} B \text{ und } \ker \mathcal{R} = \ker A.$$

Es gilt für (2.5)

$$\ker \hat{A} = \ker A \times (\operatorname{im} B)^\perp \text{ und } \operatorname{im} \hat{B} = \operatorname{im} B \times (\ker A)^\perp \quad \text{[BKM03]}.$$

Dann folgt aus Lemma 1.3 die propere Formulierung von (2.2) mit dem Projektor $\hat{\mathcal{R}} := \begin{pmatrix} \mathcal{R} & & \\ & \mathcal{R}^T & \\ & & 0 \end{pmatrix}$. Es ist nämlich $\hat{\mathcal{R}}^2 = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^2 & & \\ & (\mathcal{R}^T)^2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{R}}$, sowie

$$\begin{aligned} \ker \hat{\mathcal{R}} &= \ker \mathcal{R} \times \ker \mathcal{R}^T = \ker \mathcal{R} \times (\operatorname{im} \mathcal{R})^\perp = \ker A \times (\operatorname{im} B)^\perp \\ &= \ker A \times \ker B^T \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{im}\hat{\mathcal{R}} &= \operatorname{im}\mathcal{R} \times \operatorname{im}\mathcal{R}^T = \operatorname{im}\mathcal{R} \times (\ker\mathcal{R})^\perp = \operatorname{im} B \times (\ker A)^\perp \\ &= \operatorname{im} B \times \operatorname{im} A^T.\end{aligned}$$

Daher ist $\left(\ker A \times \ker B^T\right) \oplus \left(\operatorname{im} B \times \operatorname{im} A^T\right) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\tilde{n}}$. □

Das folgende Lemma liefert eine wichtige Beziehung zwischen einer Lösung der Optimalitäts-DAE und einer Lösung des Steuerungsproblems.

Lemma 2.3. *Das Tripel $x_* \in C^1_{D_0}\left(\mathcal{I}, \mathbb{R}^m\right)$, $\psi_* \in C^1_{A^T}\left(\mathcal{I}, \mathbb{R}^k\right)$, $u_* \in C\left(\mathcal{I}, \mathbb{R}^l\right)$ sei Lösung des Randwertproblems* (2.4). *Dann ist u_* optimale Steuerung für das Problem* (2.1) - (2.3) *und x_* ist die zugehörige optimale Trajektorie.*

Beweis. [BKM03] □

Für die gesteuerte DAE (2.2) lassen sich die Matrizen und Projektoren der Sequenz aus Abschnitt 1.2 wie folgt wählen (jeweils punktweise in $t \in \mathcal{I}$) [BKM03].

$$\left.\begin{array}{ll} A_0 = A, & \widetilde{G}_0 = A_0 D_0 = AB \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k\right), \\ D_0 = B, & \widetilde{G}_1 = \widetilde{G}_0 - C\widetilde{\mathcal{Q}}_0 \text{ und} \\ \multicolumn{2}{l}{\widetilde{\mathcal{Q}}_0 \in L\left(\mathbb{R}^m\right) \text{ Projektor auf } \ker\widetilde{G}_0 \subseteq \mathbb{R}^m. \text{ Zusätzlich sei}} \\ \multicolumn{2}{l}{\widetilde{\mathcal{Q}}_{*0} \in L\left(\mathbb{R}^k\right) \text{ Projektor auf } \ker\widetilde{G}_0^T \subseteq \mathbb{R}^k.} \end{array}\right\} \qquad (2.6)$$

Dabei seien hier $\widetilde{\mathcal{Q}}_0$ und $\widetilde{\mathcal{Q}}_{*0}$ Orthoprojektoren (s. a. [KM00]), d.h. anstelle von D_0^- verwenden wir die Moore-Penrose-Inverse D_0^+ von D_0. Jetzt können wir die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für regulären Traktabilitätsindex 1 der Optimalitäts-DAE aus [BKM03] betrachten.

Lemma 2.4 (Regulärer Traktabilitätsindex 1). *Die Optimalitäts-DAE* (2.4) *ist regulär mit Traktabilitätsindex 1 genau dann, wenn die Bedingungen*

$$\ker\begin{pmatrix} \widetilde{G}_0(t)^T \\ \widetilde{\mathcal{Q}}_0(t)\, C(t)^T \\ D(t)^T \end{pmatrix} = \{0\} \quad \textit{und} \quad \ker\begin{pmatrix} \widetilde{G}_0(t) & 0 \\ \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0}(t)\, C(t) & \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0}(t)\, D(t) \\ \widetilde{\mathcal{Q}}_0(t)\, W(t) & \widetilde{\mathcal{Q}}_0(t)\, S(t) \\ S(t)^T & \widetilde{R}(t) \end{pmatrix} = \{0\} \qquad (2.7)$$

für alle $t \in \mathcal{I}$ erfüllt sind.

Beweis. [BKM03] □

Um das Problem zu vereinfachen und im Hinblick auf die anschließende Riccati-Transformation von Optimalitäts-DAEs, werden zusätzlich folgende Bedingungen vorausgesetzt. Für alle $t \in \mathcal{I}$ sei $S(t) = 0$ und $\widetilde{R}(t)$ positiv definit. Wir formulieren nun Lemma 2.4 für diesen Spezialfall.

Lemma 2.5. *Für alle $t \in \mathcal{I}$ gelte $S(t) = 0$ und $\widetilde{R}(t) > 0$. Dann ist die Optimalitäts-DAE (2.4) regulär mit Traktabilitätsindex 1 genau dann, wenn die Bedingungen*

$$\ker \begin{pmatrix} \widetilde{G}_0(t)^T \\ \widetilde{\mathcal{Q}}_0(t)\, C(t)^T \\ D(t)^T \end{pmatrix} = \{0\} \tag{2.8a}$$

und

$$\ker \begin{pmatrix} \widetilde{G}_0(t) \\ \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0}(t)\, C(t) \\ \widetilde{\mathcal{Q}}_0(t)\, W(t) \end{pmatrix} = \{0\} \tag{2.8b}$$

für alle $t \in \mathcal{I}$ erfüllt sind.

Beweis. Unter den Voraussetzungen $S(t) = 0$ und $\widetilde{R}(t) > 0$ für alle $t \in \mathcal{I}$ lassen sich die Bedingungen (2.8a) und (2.8b) direkt aus Lemma 2.4 herleiten. □

2.2 Riccati-Transformation

Für das Lösen von linearen Systemen regulärer gewöhnlicher Differentialgleichungen haben sich verschiedene Verfahren etabliert, die auf das Lösen von nichtlinearen Differentialgleichungen führen [Pet98]. Die Riccati-Transformation gehört zu diesen Methoden, sie realisiert für lineare Randwertaufgaben eine stetigen Entkopplung. Es wird versucht die schnell-wachsenden Modi von den schnell-fallenden Modi zu trennen. Diese werden dann nur in die jeweiligen stabilen Richtungen integriert [AP98]. Andererseits nimmt man in Kauf, dass, an Stelle eines linearen Randwertproblems mit separierten Randbedingungen, eine nichtlineare Anfangswertaufgabe vom Riccati-Typ gelöst werden muss [AMR88].

Einige Nachteile sind offensichtlich. So ist z. B. die entstandene nichtlinearen Gleichung möglicherweise nicht auf dem gesamten Intervall lösbar, sodass eine numerische Integration nicht oder nur sehr aufwendig möglich ist. Dennoch überwiegen vielfach die Vorteile, die in der einfachen Konstruktion und in der Hoffnung liegen, dass das transformierte System stabil ist und sich entsprechend stabil und effizient integrieren lässt [AMR88].

Aus dieser Erfahrung entstand die Idee, die Methode zum Lösen von Algebrodifferentialgleichungen auszuprobieren. Es wird nun ein Ansatz für die Riccati-Transformation der Optimalitäts-DAE (2.4) vorgestellt. Das 3. Kapitel beschäftigt sich dann mit der Analyse der aus einer regulären Optimalitäts-DAE entstandenen, nichtlinearen matrixwertigen Algebrodifferentialgleichung.

Im Folgenden werden alle Koeffizienten punktweise in $t \in \mathcal{I}$ betrachtet. Es sei von nun an $\widetilde{R} > 0$ auf $\mathcal{I}$, dann ist $u = -\widetilde{R}^{-1}\left(S^T x + D^T \psi\right)$. Daher gilt

$$\left\{\begin{aligned} A(Bx)' &= Cx - D\widetilde{R}^{-1}\left(S^T x + D^T\psi\right) \\ -B^T\left(A^T\psi\right)' &= Wx + C^T\psi - S\widetilde{R}^{-1}\left(S^T x + D^T\psi\right) \\ u &= -\widetilde{R}^{-1}\left(S^T x + D^T\psi\right) \end{aligned}\right.$$

$$\leftrightarrow \qquad \left\{\begin{aligned} A(Bx)' &= \left(C - D\widetilde{R}^{-1}S^T\right)x - D\widetilde{R}^{-1}D^T\psi \\ -B^T\left(A^T\psi\right)' &= \left(W - S\widetilde{R}^{-1}S^T\right)x + \left(C^T - S\widetilde{R}^{-1}D^T\right)\psi \\ u &= -\widetilde{R}^{-1}\left(S^T x + D^T\psi\right). \end{aligned}\right.$$

Mit dem Ansatz $\psi = KBx$, $K \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und o.B.d.A. $A^T K = K^T A$ (siehe dazu Satz 2.6) erhält man

$$\begin{cases} A(Bx)' = \left(C - D\widetilde{R}^{-1}S^T\right)x - D\widetilde{R}^{-1}D^T KBx \\ -B^T\left(A^T KBx\right)' = \left(W - S\widetilde{R}^{-1}S^T\right)x + \left(C^T - S\widetilde{R}^{-1}D^T\right)KBx \\ u = -\widetilde{R}^{-1}\left(S^T x + D^T KBx\right). \end{cases}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} -B^T\left(A^T K\right)' Bx =& B^T A^T K (Bx)' - B^T\left(A^T KBx\right)' \\ =& B^T K^T A (Bx)' - B^T\left(A^T KBx\right)' \\ =& B^T K^T \left(C - D\widetilde{R}^{-1}\left(S^T + D^T KB\right)\right)x \\ &+ \left(W + C^T KB - S\widetilde{R}^{-1}\left(S^T + D^T KB\right)\right)x \\ =& \left(B^T K^T C + W + C^T KB\right)x \\ &- \left(\left(S + B^T K^T D\right)\widetilde{R}^{-1}\left(S^T + D^T KB\right)\right)x. \end{aligned}$$

Schließlich entsteht eine matrixwertige Riccati-Typ Algebrodifferentialgleichung (MR-DAE) bezüglich K

$$\begin{aligned} -B^T\left(A^T K\right)' B = & \; B^T K^T C + C^T KB + W \\ & - \left(S + B^T K^T D\right)\widetilde{R}^{-1}\left(S^T + D^T KB\right) \end{aligned} \tag{2.9a}$$

und aus der Endbedingung der Randwertaufgabe (2.4) ergibt sich

$$B(T)^T A(T)^T K(T) B(T) = V. \tag{2.9b}$$

Für den Fall $S = 0$ wurden bereits matrixwertige Riccati-Typ Algebrodifferentialgleichung in [Kur93] untersucht, allerdings nicht in properer Formulierung. Anhand von Beispielen wird dort darauf hingewiesen, dass die Riccati-Gleichung eventuell nicht lösbar ist, obwohl das optimale Steuerungsproblem eindeutig lösbar ist.

Im Fall $A = B = I$ und $S = 0$ entspricht die MR-DAE, sowohl in der Standardformulierung [Kur93] als auch in der hier vorliegenden properen Formulierung, der bekannten matrixwertigen Riccati Gleichung, wie sie u. a. in [Rei72] betrachtet wird.

Der folgende Satz liefert einen Zusammenhang zwischen einer Lösung der MR-DAE und einer Lösung der Optimalitäts-DAE.

Satz 2.6. *Es sei* $\ker B^T = \{0\}$ *und* $K \in C^1_{A^T}(\mathcal{I}, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ *Lösung von* (2.9) *und* $x \in C^1_B(\mathcal{I}, L(\mathbb{R}^m))$ *Lösung von*

$$A(Bx)' = \left(C - D\widetilde{R}^{-1}S^T\right)x - D\widetilde{R}^{-1}D^T KBx, \tag{2.10a}$$

$$A(0)B(0)x(0) = y_0 \tag{2.10b}$$

so gilt

1. *$A^T K = K^T A$ und*
2. *das Tripel* $\left(x \in C_B^1, \quad \psi := KBx \in C_{A^T}^1, \quad u := -\widetilde{R}^{-1}\left(S^T x + D^T \psi\right) \in C\right)$ *ist Lösung der Randwertaufgabe* (2.4).

Auf die zusätzliche Voraussetzung $\ker B^T = \{0\}$ werden wir im folgenden Kapitel noch einmal genauer eingehen. Sie wird bei der Analyse des Hauptterms der Riccati-Gleichung erneut eine wichtige Rolle spielen wird. Es wird sich zeigen, dass diese Einschränkung durchaus realisierbar und sinnvoll ist.

Beweis. Es sei $\ker B^T = \{0\}$, $K \in C_{A^T}^1\left(\mathcal{I}, L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)\right)$ Lösung von (2.9), $x \in C_B^1\left(\mathcal{I}, L\left(\mathbb{R}^m\right)\right)$ sei Lösung von (2.10). Dann gilt

1. a) Die rechte Seite der Gleichung (2.9a) ist symmetrisch (wg. W und $\widetilde{R}$ symmetrisch). Damit gilt für die linke Seite

$$
\begin{aligned}
& & & B^T\left(A^T K\right)' B = B^T\left(AK^T\right)' B \\
& & \leftrightarrow \quad & B^T\left(A^T K - AK^T\right)' B = 0 \\
& \left(\ker B^T = \{0\}\right) & \leftrightarrow \quad & \left(AK^T - A^T K\right)' = 0 \\
& & \leftrightarrow \quad & AK^T - A^T K = \text{konstant}\,.
\end{aligned}
$$

   b) Betrachte zusätzlich die Anfangsbedingung (2.9b). Da V symmetrisch ist, gilt

$$
\begin{aligned}
& & & B(T)^T A(T)^T K(T) B(T) = B(T)^T K(T)^T A(T) B(T) \\
& \left(\ker B^T = \{0\}\right) & \leftrightarrow \quad & A(T)^T K(T) - K(T)^T A(T) = 0.
\end{aligned}
$$

   $\longrightarrow AK^T = A^T K.$

2. Es sei $\ker B^T = \{0\}$ und $K \in C_{A^T}^1$, $x \in C_B^1$ Lösungen von (2.9) bzw. (2.10) und es seien $\psi := KBx \in C_{A^T}^1$, $u := -\widetilde{R}^{-1}\left(S^T x + D^T \psi\right) \in C$. Daher gilt

$$
\begin{cases}
-B^T\left(A^T K\right)' B = & B^T K^T C + C^T KB + W \\
& - \left(S + B^T K^T D\right)\widetilde{R}^{-1}\left(S^T + D^T KB\right) \\
A(Bx)' = & \left(C - D\widetilde{R}^{-1} S^T\right) x - D\widetilde{R}^{-1} D^T KBx.
\end{cases}
$$

   Dann sind die Randbedingungen und der folgende Teil des Systems (2.4) erfüllt

$$
\begin{pmatrix} A(Bx)' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 & D \\ S^T & D^T & \widetilde{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \psi \\ u \end{pmatrix}.
$$

   Wir untersuchen nun die fehlende Gleichung

$$
\begin{aligned}
& & B^T\left(A^T \psi\right)' = & B^T\left(A^T KBx\right)' \\
& & = & B^T\left(A^T K\right)' Bx + B^T K^T A(Bx)' \\
& \text{(2.9),(2.10)} & = & - B^T K^T Cx - C^T KBx - Wx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(S + B^T K^T D\right) \widetilde{R}^{-1} \left(S^T + D^T K B\right) x \\
&+ B^T K^T \left(C - D\widetilde{R}^{-1} S^T - D\widetilde{R}^{-1} D^T K B\right) x \\
&= \left(S\widetilde{R}^{-1} D^T - C^T\right) K B x + \left(-W + S\widetilde{R}^{-1} S^T\right) x \\
&+ B^T K^T \left(-C + D\widetilde{R}^{-1} \left(S^T + D^T K B\right)\right) x \\
&+ B^T K^T \left(C - D\widetilde{R}^{-1} S^T - D\widetilde{R}^{-1} D^T K B\right) x \\
&= -\left(C^T - S\widetilde{R}^{-1} D^T\right) K B x - \left(W - S\widetilde{R}^{-1} S^T\right) x \\
\leftrightarrow \qquad -B^T \left(A^T \psi\right)' &= \left(W - S\widetilde{R}^{-1} S^T\right) x + \left(C^T - S\widetilde{R}^{-1} D^T\right) \psi.
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ (2.4) ist erfüllt.

$\square$

3 Matrixwertige Algebrodifferentialgleichungen vom Riccati-Typ

Nachdem im vorangegangenen Kapitel die Riccati-Transformation von Optimalitäts-DAEs vorgestellt wurde, wenden wir uns nun der Untersuchung der daraus entstandenen MR-DAEs zu. Im nächsten Kapitel betrachten wir dazu einige Beispiele.

Aus der Optimalitäts-DAE (2.4) wurde im 2. Kapitel unter den zusätzlichen Voraussetzungen

$$S(t) = 0, \ V = 0, \ \widetilde{R}(t) \text{ positiv definit}, \ t \in \mathcal{I}$$

und der Festlegung

$$R(t) := D(t)\,\widetilde{R}^{-1}(t)\,D^T(t)\,, \ t \in \mathcal{I}$$

die Endwertaufgabe in Form einer matrixwertigen Algebrodifferentialgleichung vom Riccati-Typ (MR-DAE)

$$\begin{aligned} -B^T(t)\left(A^T(t)\,X(t)\right)' B = {} & B^T(t)\,X^T(t)\,C(t) + C^T(t)\,X(t)\,B(t) && (3.1a)\\ & - B^T(t)\,X^T(t)\,R(t)\,X(t)\,B(t) + W(t)\,, \quad t \in \mathcal{I} & \\ \left(B^T A^T X B\right)(T) = 0 & && (3.1b)\end{aligned}$$

hergeleitet. Hierbei sind

$$\begin{aligned} A(t) &\in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right), & X(t) &\in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right),\\ B(t) &\in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right), & R(t) &\in L\left(\mathbb{R}^k\right),\\ C(t) &\in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k\right), & W(t) &\in L\left(\mathbb{R}^m\right).\end{aligned}$$

Für die Überprüfung der Bedingungen für die propere Formulierung des Hauptterms und den Traktabilitätsindex der MR-DAE, ist es zunächst erforderlich die MR-DAE in eine DAE der Form (1.1) zu überführen. Dieser Schritt, die so genannte Vektorisierung, wird im folgenden Abschnitt behandelt.

Anschließend beginnt die Analyse der vektorisierten Gleichung. Wir betrachten den Hauptterm, untersuchen den Traktabilitätsindex und werden herausfinden, inwiefern sich der reguläre Traktabilitätsindex 1 der Optimalitäts-DAE auf die MR-DAE überträgt. Es wird sich zeigen, dass sich die Index- und Lösbarkeitseigenschaften der Optimalitäts-DAE von denen der MR-DAE unterscheiden. Die Regularität der Optimalitäts-DAE wird nicht auf die MR-DAE übertragen.

3.1 Vektorisierung

Zunächst wird die matrixwertige Gleichung in eine vektorwertige Form gebracht. Als Ergebnis erhält man eine Algebrodifferentialgleichung mit Werten in $\mathbb{R}^{kn}$. Eine Aufstellung der dazu benötigten Definitionen und Rechenregeln für das Kronecker Produkt $\otimes$ und den vec-Operator sind in Abschnitt A.4 zu finden.

Im Folgenden werden die Argumente weggelassen. Falls nicht anders angegeben, werden jeweils die Koeffizienten punktweise in ihren Argumenten betrachtet.

Definition 3.1 (Vektorisierte MR-DAE). Die Gleichung

$$\begin{aligned} -\left(B^T \otimes B^T\right)\left(\left(I_n \otimes A^T\right) \operatorname{vec} X\right)' = {} & \left(P(m,m) + I_{m^2}\right)\left(B^T \otimes C^T\right) \operatorname{vec} X \\ & - \left(B^T \otimes B^T\right) \operatorname{vec}\left(X^T R X\right) + \operatorname{vec} W \end{aligned} \tag{3.2a}$$

mit der Nebenbedingung

$$\left(\left(B^T \otimes B^T A^T\right) \operatorname{vec} X\right)(T) = 0 \tag{3.2b}$$

wird die mit (3.1) assoziierte *vektorisierte MR-DAE* genannt.

Rechtfertigung für Definition 3.1. Einige Resultate aus den Lemmata A.10 und A.12 werden in den folgenden Berechnungen verwendet. Die wichtigsten sind

- $\exists! P(k,n) \in L\left(\mathbb{R}^{kn}\right): \quad \operatorname{vec}\left(X^T\right) = P(k,n) \operatorname{vec} X, \quad \forall X \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right),$
- $\left(C^T \otimes B^T\right) = P(m,m)^T \left(B^T \otimes C^T\right) P(n,k)$ und
- $P(n,k) = P(k,n)^{-1} = P(k,n)^T.$

Nun wird (3.1a) vektorisiert, dazu wenden wir den vec-Operator auf die Gleichung an. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \operatorname{vec}\left(-B^T \left(A^T X\right)' B\right) = \operatorname{vec}\left(B^T X^T C + C^T X B - B^T X^T R X B + W\right) \\ \leftrightarrow \quad & -\left(B^T \otimes B^T\right) \operatorname{vec}\left(A^T X\right)' \\ & \qquad = \left(C^T \otimes B^T\right) \operatorname{vec}\left(X^T\right) + \left(B^T \otimes C^T\right) \operatorname{vec} X \\ & \qquad\quad - \left(B^T \otimes B^T\right) \operatorname{vec}\left(X^T R X\right) + \operatorname{vec} W \\ \leftrightarrow \quad & -\left(B^T \otimes B^T\right)\left(\left(I_n \otimes A^T\right) \operatorname{vec} X\right)' \\ & \qquad = \left[(C \otimes B)^T P(k,n) + (B \otimes C)^T\right] \operatorname{vec} X \\ & \qquad\quad - (B \otimes B)^T \operatorname{vec}\left(X^T R X\right) + \operatorname{vec} W \\ & \qquad = \left[P(m,m)^T (B \otimes C)^T P(n,k) P(k,n) + (B \otimes C)^T\right] \operatorname{vec} X \\ & \qquad\quad - (B \otimes B)^T \operatorname{vec}\left(X^T R X\right) + \operatorname{vec} W \\ & \qquad = \left(P(m,m) + I_{m^2}\right)(B \otimes C)^T \operatorname{vec} X \\ & \qquad\quad - (B \otimes B)^T \operatorname{vec}\left(X^T R X\right) + \operatorname{vec} W. \end{aligned}$$

□

3.2 Proper formulierte MR-DAEs

Der Traktabilitätsindex ist für proper formulierte Algebrodifferentialgleichung definiert. Daher wird zunächst der Hauptterm der vektorisierten MR-DAE auf propere Formulierung untersucht.

Es ist $A_0 = B^T \otimes B^T$ und $D_0 = I \otimes A^T$. Nach Definition hat die vektorisierte MR-DAE genau dann einen proper formulierten Hauptterm, wenn das geordnete Paar $\left(\left(B^T \otimes B^T\right), \left(I \otimes A^T\right)\right)$ gut zusammenpasst. In diesem Fall bezeichnen wir auch den Hauptterm der MR-DAE als proper formuliert.

Satz 3.2 (Proper formulierte vektorisierte MR-DAE). *Das geordnete Paar* (A, B) *aus* (3.1) *sei gut zusammenpassend. Dann hat die vektorisierte MR-DAE* (3.2) *einen proper formulierten Hauptterm genau dann, wenn für alle* $t \in \mathcal{I}$ *gilt*

$$\ker B^T(t) = \{0\}.$$

Beweis. ($\longrightarrow$) Seien zunächst für alle $t \in \mathcal{I}$

$$a := \operatorname{rg} A(t) = \operatorname{rg} A^T(t), \quad A(t) \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right),$$
$$b := \operatorname{rg} B(t) = \operatorname{rg} B^T(t), \quad B(t) \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right),$$
$$\mathbb{R}^n = \ker A(t) \oplus \operatorname{im} B(t), \tag{3.3}$$
$$\mathbb{R}^{n^2} = \ker\left(B^T(t) \otimes B^T(t)\right) \oplus \operatorname{im}\left(I_n \otimes A^T(t)\right). \tag{3.4}$$

Dann folgt aus (3.3) und (3.4)

$$\begin{array}{rccc} & (n-a)+b=n & \text{und} & \left(n^2-b^2\right)+na=n^2. \\ \rightarrow & a=b & \text{und} & a^2=na \\ \rightarrow & n=a=b & & \\ \rightarrow & \ker A(t)=\{0\} & \text{und} & \operatorname{im} B(t)=\mathbb{R}^n, \text{ für alle } t \in \mathcal{I} \\ (\ \leftrightarrow & \ker B^T(t)=\{0\} & \text{und} & \operatorname{im} A^T(t)=\mathbb{R}^n, \text{ für alle } t \in \mathcal{I} \quad). \end{array}$$

($\longleftarrow$) Alle folgenden Betrachtungen erfolgen punktweise in $t \in \mathcal{I}$. (A, B) aus (3.1) seien gut zusammenpassende Matrizen. Dann folgt mit Lemma 1.3, dass auch $\left(B^T, A^T\right)$ gut zusammenpassen. Weiterhin gelte $\ker B^T = \{0\}$.

Dann gilt (aufgrund von Definition 1.2) $\ker B^T \oplus \operatorname{im} A^T = \mathbb{R}^n$ und der Projektor $\mathcal{R} := I_n$ realisiert die Zerlegung (1.4). Es ist $\{0\} = \ker B^T = \ker \mathcal{R}$ und $\operatorname{im} A^T = \operatorname{im} \mathcal{R} = \mathbb{R}^n$.

Mit $\widetilde{\mathcal{R}} := I_n \otimes I_n = I_{n^2}$, $\widetilde{\mathcal{R}}$ Projektor, $\operatorname{im} A^T = \mathbb{R}^n$ und $\ker B^T = \{0\}$ folgt

$$\operatorname{im} \widetilde{\mathcal{R}} = \operatorname{im}(I_n \otimes I_n) = \mathbb{R}^{n^2} = \operatorname{im}\left(I_n \otimes A^T\right),$$
$$\ker \widetilde{\mathcal{R}} = \ker(I_n \otimes I_n) = \{0\} = \ker\left(B^T \otimes B^T\right),$$
$$\mathbb{R}^{n^2} = \ker\left(B^T \otimes B^T\right) \oplus \operatorname{im}\left(I_n \otimes A^T\right).$$

$\rightarrow \left(\left(B^T \otimes B^T\right), \left(I_n \otimes A^T\right)\right)$ passen gut zusammen. $\square$

Die Bedingung $\ker B^T = \{0\}$ kennen wir schon aus Satz 2.6. Für proper formulierte DAEs ist sie äquivalent mit $\ker A(t) = \{0\}$ (bzw. $\operatorname{im} B = \mathbb{R}^n$ und $\operatorname{im} A^T = \mathbb{R}^n$). Ab jetzt werden wir nur noch solche DAEs untersuchen.

Diese weitere Voraussetzung erfordert eventuell eine Refaktorisierung der DAE. Sie schränkt die Menge der DAEs, die betrachtet werden können jedoch nicht ein. Für jede proper formulierte DAE kann der Hauptterm so refaktorisiert werden, dass die Bedingung $\ker B^T = \{0\}$ erfüllt ist [Mär02b]. Für reguläre DAEs wurde dort nachgewiesen, dass der Traktabilitätsindex bei einer solchen Refaktorisierung unverändert bleibt. Im Beweis werden die Matrixketten der DAE und ihrer Refaktorisierung verglichen. Es zeigt sich, dass die Elemente der Matrixkette identisch gewählt werden können. Daher ist die Aussage auf singuläre DAEs übertragbar. Der Traktabilitätsindex bleibt auch für singuläre DAEs unter Refaktorisierung unverändert.

Mit $\ker A(t) = \{0\}$ ist für die Optimalitäts-DAE (2.5) auch $\ker \hat{A}(t) = \ker \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & B^T(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{0\}$. Dann ist also $n = \operatorname{rg} A(t) =: r$, $\hat{n} = 2n = 2r$. In diesem Fall hat die inhärente, explizite, reguläre gewöhnliche Differentialgleichung einer regulären Optimalitäts-DAE mit Traktabilitätsindex 1 eine Hamilton-Struktur [BKM03] . Falls dagegen $n > r$ ist und insbesondere $\operatorname{im} B(t)$ ein $r-$dimensionaler zeitabhängiger Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist, können die Hamilton-Eigenschaften nicht gesichert werden [BKM03]. Für die Behandlung von Riccati-transformierten optimalen Steuerungsaufgaben ist $\ker A = \{0\}$ aufgrund der Bedingungen für die propere Formulierung von Optimalitäts-DAE und MR-DAE (vgl. Satz 3.2) ohnehin notwendig. Aber auch für die numerische Integration kann man sich die Eigenschaften Hamiltonscher Gleichungen zu Nutze machen [HW96].

3.3 Matrixkette für MR-DAEs

Das folgende Lemma beschreibt die Elemente der Matrixkette der MR-DAE. Von nun an sei $x := \operatorname{vec} X \in \mathbb{R}^{nk}$, für jedes $X \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.

Lemma 3.3. *Für die Elemente der Matrixkette der MR-DAE gilt punktweise in $t \in \mathcal{I}$, $X \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$*

$$\begin{aligned}
&A_0 = B^T \otimes B^T \in L\left(\mathbb{R}^{n^2}, \mathbb{R}^{m^2}\right), && D_0 = I_n \otimes A^T \in L\left(\mathbb{R}^{kn}, \mathbb{R}^{n^2}\right),\\
&G_0 = B^T \otimes B^T A^T \in L\left(\mathbb{R}^{nk}, \mathbb{R}^{m^2}\right), && D_0^+ = I_n \otimes \left(A^+\right)^T,\\
&N_0 = \ker\left(I_n \otimes A^T\right), &&\\
&\mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0} \end{pmatrix}, && \mathcal{P}_0 = I_n \otimes \left(I - \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0}\right) \textit{ und}\\
&B_0 = \left(P(m,m) + I_{m^2}\right)\left(\left(B^T \otimes C^T\right) - \left(B^T \otimes B^T X^T R\right)\right). &&
\end{aligned}$$

Beweis. 1. Berechnung von G_0 und B_0

$$G_0(t) = \left(B^T \otimes B^T\right)\left(I \otimes A^T\right) = B^T \otimes B^T A^T = (B \otimes AB)^T.$$

Für die folgenden Ausführungen werden die Ableitungsregeln für den vec-Operator aus Abschnitt A.4 benötigt.

$$\begin{aligned}
B_0(x,t) &= \left[\left(P(m,m)^T + I_{m^2}\right)\left(B^T \otimes C^T\right)\operatorname{vec} X - \left(B^T \otimes B^T\right)\operatorname{vec}\left(X^T R X\right) + \operatorname{vec} W\right]_x\\
&= \left(P(m,m) + I_{m^2}\right)(B \otimes C)^T - (B \otimes B)^T \operatorname{vec}\left(\left[X^T\right]_x R X + X^T R [X]_x\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(P\left(m,m\right)+I_{m^2}\right)\left(B\otimes C\right)^T \\
&\quad - \left(B\otimes B\right)^T\left(\left(X^TR\otimes I_n\right)\left[\operatorname{vec}\left(X^T\right)\right]_x + \left(I_n\otimes X^TR\right)\left[\operatorname{vec}\left(X\right)\right]_x\right) \\
&= \left(P\left(m,m\right)+I_{m^2}\right)\left(B\otimes C\right)^T \\
&\quad - \left(B\otimes B\right)^T\left(\left(X^TR\otimes I_n\right)\left[P\left(k,n\right)\operatorname{vec}\left(X\right)\right]_x + \left(I_n\otimes X^TR\right)\left[\operatorname{vec}\left(X\right)\right]_x\right) \\
&= \left(P\left(m,m\right)+I_{m^2}\right)\left(B\otimes C\right)^T - \left(B^TX^TR\otimes B^T\right)P\left(k,n\right) - \left(B^T\otimes B^TX^TR\right) \\
&= \left(P\left(m,m\right)+I_{m^2}\right)\left(B\otimes C\right)^T \\
&\quad - P\left(m,m\right)\left(B^T\otimes B^TX^TR\right)P\left(k,n\right)P\left(n,k\right) - \left(B^T\otimes B^TX^TR\right) \\
&= \left(P\left(m,m\right)+I_{m^2}\right)\left(\left(B^T\otimes C^T\right) - \left(B^T\otimes B^TX^TR\right)\right).
\end{aligned}
$$

2. Berechnung von N_0 und $\mathcal{Q}_0$
Sei nun $\widetilde{\mathcal{Q}}_{*0}^T = \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0}$ Projektor auf $\ker B^TA^T = \ker \widetilde{G}_0^T$ (siehe dazu (2.6)). Aus den Bedingungen für die propere Formulierung folgte $\ker B^T = \{0\}$ und somit $\ker \widetilde{G}_0^T = \ker B^TA^T = \ker A^T$. Damit ist dann

$$
\mathcal{Q}_0 := \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0} \end{pmatrix}
$$

Projektor auf

$$
N_0 = \ker G_0 = \ker\left(B^T\otimes B^TA^T\right).
$$

Es ist $\ker\left(B^T\otimes B^TA^T\right) = \ker\left(I_n\otimes A^T\right)$, denn für $Z\in L\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k\right)$ gilt

$$
\begin{aligned}
\operatorname{vec} Z \in \ker G_0 \quad &\leftrightarrow \quad \left(B^T\otimes B^TA^T\right)\operatorname{vec} Z = 0 \\
&\leftrightarrow \quad B^TA^TZB = 0 \\
\left(\ker B^T=\{0\}\right) \quad &\leftrightarrow \quad A^TZB = 0 \\
&\leftrightarrow \quad B^T\left(A^TZ\right)^T = 0 \\
\left(\ker B^T=\{0\}\right) \quad &\leftrightarrow \quad A^TZ = 0 \\
&\leftrightarrow \quad \left(I_n\otimes A^T\right)\operatorname{vec} Z = 0 \\
&\leftrightarrow \quad \operatorname{vec} Z \in \ker\left(I_n\otimes A^T\right).
\end{aligned}
$$

□

Von nun an wird die MR-DAE (3.1) regulär (bzw. singulär) mit Traktabilitätsindex $\mu = 0$ oder 1 genannt, falls die vektorisierte MR-DAE (3.2) regulären (bzw. singulären) Traktabilitätsindex $\mu = 0$ oder 1 hat.

Im folgenden Kapitel werden wir MR-DAEs untersuchen, die aus Optimalitäts-DAEs hervorgehen, die mit Optimalsteuerungsproblemen mit gesteuerten, semi-expliziten DAEs assoziiert werden. Es wird sich zeigen, dass - für den Fall A oder B singulär - mittels Riccati-Transformation eine singuläre MR-DAE entsteht. Diese ist, aufgrund ihrer teilweise symmetrischen Struktur, formal überbestimmt und dennoch eventuell lösbar. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird die MR-DAE noch einmal betrachtet, diesmal mit dem Ziel durch Aufstellen von Konsistenzbedingungen Lösbarkeit sicherzustellen und durch Entfernen von redundanten Gleichungen eine eindeutig lösbare DAE mit regulärem Traktabilitätsindex 1 zu erhalten.

Zunächst sehen wir uns jedoch den Spezialfall eines Optimalsteuerungsproblems mit einer gesteuerten Algebrodifferentialgleichung mit regulärem $\widetilde{G}_0$ an. Damit ist $m = k = n$ und die Koeffizienten A und B sind regulär auf $\mathcal{I}$.

3.4 Optimalitäts-DAE mit regulärem $\widetilde{G}_0$

Optimalitäts-DAEs, bei denen $\widetilde{G}_0 = AB$ regulär ist, können äquivalent in explizite, reguläre gewöhnliche Differentialgleichungen überführt werden. Insbesondere dann, wenn die Inverse von $\widetilde{G}_0$ nicht bekannt ist, ist dies jedoch oft nicht wünschenswert. Eine solche Gleichung wird dann wie eine Algebrodifferentialgleichung behandelt. Wir betrachten damit also gleichzeitig den allgemeinen Fall eines Optimalsteuerungsproblems mit einer gesteuerten, impliziten, regulären gewöhnlichen Differentialgleichung.

Satz 3.4 (Traktabilitätsindex der Optimalitäts-DAE). *Es sei $\widetilde{G}_0\,(t)$ für alle $t \in \mathcal{I}$ regulär. Dann ist die Optimalitäts-DAE regulär mit Traktabilitätsindex 1 und die MR-DAE ist regulär mit Traktabilitätsindex 0.*

Beweis. Es sei nun $\widetilde{G}_0\,(t)$ regulär für alle $t \in \mathcal{I}$. Für die Elemente der Matrixkette der gesteuerten DAE (2.6) gilt punktweise in $t \in \mathcal{I}$

$$\widetilde{G}_0 = AB \text{ regulär}, \qquad \widetilde{\mathcal{Q}}_0 = 0, \qquad \widetilde{G}_0^T \text{ regulär} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0} = 0.$$

Damit sind die Bedingungen (2.8a) und (2.8b), d. h. die Bedingungen

$$\ker \begin{pmatrix} \widetilde{G}_0\,(t)^T \\ \widetilde{\mathcal{Q}}_0\,(t)\,C\,(t)^T \\ D\,(t)^T \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{und} \qquad \ker \begin{pmatrix} \widetilde{G}_0\,(t) \\ \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0}\,(t)\,C\,(t) \\ \widetilde{\mathcal{Q}}_0\,(t)\,W\,(t) \end{pmatrix} = 0,$$

erfüllt.

→ Die Optimalitäts-DAE hat regulären Traktabilitätsindex 1.

Für die Elemente der Matrixkette der MR-DAE (vgl. Abschnitt 3.3) gilt dagegen

$$\begin{aligned} A_0 &= B^T \otimes B^T \text{ regulär}, & D_0 &= I_n \otimes A^T \text{ regulär}, \\ G_0 &= B^T \otimes B^T A^T \text{ regulär}, & G_1 &= G_0. \end{aligned}$$

→ Die MR-DAE ist regulär mit Traktabilitätsindex 0. □

Das Lösen eines Optimalsteuerungsproblems mit einer gesteuerten, impliziten, regulären gewöhnlichen Differentialgleichung führt - über eine Optimalitäts-DAE mit regulärem Traktabilitätsindex 1 - zu einer regulären MR-DAE mit Traktabilitätsindex 0. D. h. es ist nun eine implizite, reguläre gewöhnliche Differentialgleichung zu lösen. Mit Hilfe von Satz 2.6 und Lemma 2.3 lässt sich dann die Lösung des Optimalsteuerungsproblems finden.

3.5 Erste Betrachtungen allgemeiner MR-DAEs in Bezug auf ihren Traktabilitätsindex

Die MR-DAE wird nun noch einmal in ihrer Originalform untersucht. Ziel ist es ein Teilsystem herauszufiltern, das regulären Traktabilitätsindex 1 hat und gleichzeitig dieselben Lösungen besitzt wie die MR-DAE. Es wird kein vollständiger Beweis geliefert, jedoch kann die nachfolgende Diskussion eine Grundlage für weitere Arbeiten darstellen.

Die MR-DAE

$$-B^T\left(A^TX\right)'B = B^TX^TC + C^TXB - B^TX^TRXB + W \tag{3.5}$$

wird unter der Voraussetzung $\ker B^T = \{0\}$ betrachtet. Für die folgende Analyse benötigen wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} B^+B &= \left(B^+B\right)^T \\ 0 &= B - BB^+B = B\left(I - BB^+\right) \\ \rightarrow 0 &= \left(I - B^+B\right)B^T, \\ \rightarrow B^T &= B^+BB^T. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren nun (3.5) von links und rechts mit $I = (I - B^+B) + B^+B$ und erhalten

$$\begin{aligned} -B^T\left(A^TX\right)'B &= -B^+BB^T\left(A^TX\right)'BB^+B \text{ und} \\ B^TX^TC + C^TXB - B^TX^TRXB + W & \\ &= \left(I - B^+B\right)\left(C^TXB + W\right)B^+B \\ &\quad + \left(I - B^+B\right)W\left(I - B^+B\right) \\ &\quad + B^+B\left(B^TX^TC + W\right)\left(I - B^+B\right) \\ &\quad + B^+B\left(B^TX^TC + C^TXB - B^TX^TRXB + W\right)B^+B. \end{aligned}$$

Da B^+B und $(I - B^+B)$ Projektoren sind entspricht (3.5) dem folgenden Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -B^T\left(A^TX\right)'B =& B^+B\left(B^TX^TC + C^TXB - B^TX^TRXB + W\right)B^+B \\ =& B^TX^TCB^+B + B^+BC^TXB - B^TX^TRXB, && (3.6a) \\ 0 =& B^+B\left(B^TX^TC + W\right)\left(I - B^+B\right), && (3.6b) \\ 0 =& \left(I - B^+B\right)\left(C^TXB + W\right)B^+B, && (3.6c) \\ 0 =& \left(I - B^+B\right)W\left(I - B^+B\right). && (3.6d) \end{aligned}$$

Dabei ist (3.6d) unabhängig von X und somit als Konsistenzbedingung zu verstehen. Die MR-DAE ist nicht lösbar, falls (3.6d) nicht erfüllt ist. Andererseits gilt (3.6b) $\leftrightarrow$ (3.6c), denn es ist $W^T = W$ und damit

$$\begin{aligned} (3.6\text{b}) \leftrightarrow 0 =& B^+B\left(B^TX^TC + W\right)\left(I - B^+B\right) \\ =& B^TX^TC + B^+BW + B^TX^TCB^+B + B^+BWB^+B \\ =& C^TXB + W\left(B^+B\right)^T + \left(B^+B\right)^TC^TXB + \left(B^+B\right)^TW\left(B^+B\right)^T \\ =& B^+BC^TXB + WB^+B + C^TXB + B^+BWB^+B \end{aligned}$$

$$= \left(I - B^+B\right)\left(C^TXB + W\right)B^+B \leftrightarrow \text{(3.6c)}.$$

Das System (3.6) hat unter der Voraussetzung (3.6d) dieselbe Lösungsmenge wie

$$-B^T\left(A^TX\right)'B = B^TX^TCB^+B + B^+BC^TXB - B^TX^TRXB, \tag{3.7a}$$
$$0 = \left(I - B^+B\right)\left(C^TXB + W\right)B^+B. \tag{3.7b}$$

Dabei ist (3.7a) die inhärente Differentialgleichung, während die algebraischen Nebenbedingungen in (3.7b) zu finden sind. Als nächstes soll die Frage geklärt werden, unter welcher Bedingung das System (3.7) regulär mit Traktabilitätsindex 1 ist.

Wir vektorisieren nun (3.7). Diesmal werden jedoch (3.7a) und (3.7b) einzeln vektorisiert. Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 3.1 erhalten wir eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned}
-\left(B^T \otimes B^T\right)\left(\left(I \otimes A^T\right)\operatorname{vec} X\right)' &= \left(B^+BC^T \otimes B\right)P\left(m,m\right)\operatorname{vec} X \\
&\quad + \left(B^T \otimes B^+BC^T\right)\operatorname{vec} X - \left(B^T \otimes B^T\right)\operatorname{vec}\left(X^TRX\right) \\
\operatorname{vec}\left(0\right) &= \left(B^T \otimes \left(I - B^+B\right)C^T\right)\operatorname{vec} X + \operatorname{vec}\left(\left(I - B^+B\right)WB^+B\right).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
G_0 &= \begin{pmatrix} B^T \otimes B^TA^T \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist nicht regulär} \\
N_0 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{m^2} \,\middle|\, \begin{pmatrix} B^T \otimes B^TA^T \\ 0 \end{pmatrix} x = 0 \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^{m^2} \,\middle|\, \left(B^T \otimes B^TA^T\right)x = 0 \right\}, \\
B_0 &= \begin{pmatrix} \left(P\left(m,m\right) + I\right)\left[\left(B^T \otimes B^+BC^T\right) - \left(B^T \otimes B^TX^TR\right)\right] \\ B^T \otimes \left(I - B^+B\right)C^T \end{pmatrix}, \\
S_0 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{m^2} \,\middle|\, \begin{array}{r} \begin{pmatrix} \left(P\left(m,m\right) + I\right)\left[\left(B^T \otimes B^+BC^T\right) - \left(B^T \otimes B^TX^TR\right)\right] \\ B^T \otimes \left(I - B^+B\right)C^T \end{pmatrix} x \\ \in \operatorname{im} \begin{pmatrix} B^T \otimes B^TA^T \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^{m^2} \,\middle|\, \begin{array}{r} \left(P\left(m,m\right) + I\right)\left[\left(B^T \otimes B^+BC^T\right) - \left(B^T \otimes B^TX^TR\right)\right]x \\ \in \operatorname{im}\left(B^T \otimes B^TA^T\right) \\ B^T \otimes \left(I - B^+B\right)C^Tx = 0 \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Es ist $B^+B = \widetilde{\mathcal{P}}_0$ (vgl. Abschnitt 1.2 und die Anmerkungen zu (2.6)). Die DAE (3.7) ist regulär mit Traktabilitätsindex 1 genau dann, wenn $S_0 \cap N_0 = \{0\}$ und G_0 nicht regulär ist.

$$\begin{aligned}
\leftrightarrow S_0 \cap N_0 = \{0\} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{m^2} \,\middle|\, \begin{array}{r} \left(B^T \otimes B^TA^T\right)x = 0, \\ \left(P\left(m,m\right) + I\right)\left[\left(B^T \otimes B^+BC^T\right)\right. \\ \left. - \left(B^T \otimes B^TX^TR\right)\right]x \in \operatorname{im}\left(B^T \otimes B^TA^T\right), \\ \left(B^T \otimes \left(I - B^+B\right)C^T\right)x = 0 \end{array} \right\} \\
&\subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^{m^2} \,\middle|\, \begin{array}{r} \left(I \otimes A^T\right)x = 0, \\ \left(I \otimes \left(I - B^+B\right)C^T\right)x = 0 \end{array} \right\} \\
&= \{0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow \ker\left(I \otimes A^T\right) \cap \ker\left(I \otimes \left(I - B^+B\right) C^T\right) = \{0\} \\
&\leftrightarrow \operatorname{im} \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0} \cap \ker \widetilde{\mathcal{Q}}_0 C^T = \{0\} \\
&\leftrightarrow \ker \begin{pmatrix} \widetilde{G}_0^T \\ \widetilde{\mathcal{Q}}_0 C^T \end{pmatrix} = \{0\} \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

An den vorangegangenen Betrachtungen können wir eine gewisse Ähnlichkeit zwischen den Bedingungen (2.8) für regulären Traktabilitätsindex 1 der Optimalitäts-DAE und (3.8) erkennen. Tatsächlich sichert (3.8) regulären Traktabilitätsindex 1 für (3.7), ist aber eventuell zu restriktiv. Genauere Aussagen kann eventuell eine weitere Untersuchung der Bedingung

$$(P(m,m) + I)\left[\left(B^T \otimes B^+BC^T\right) - \left(B^T \otimes B^T X^T R\right)\right] x \in \operatorname{im}\left(B^T \otimes B^T A^T\right)$$

liefern. Eventuell lässt sich dann ein exakter Zusammenhang zwischen (2.8) und den Bedingungen für regulären Traktabilitätsindex 1 von (3.7) feststellen.

4 Analyse der Eigenschaften von speziellen MR-DAEs

Bei der nun folgenden Analyse von matrixwertigen Algebrodifferentialgleichungen vom Riccati-Typ konzentrieren wir uns auf eine spezielle Form von Gleichungen. In der Vergangenheit hat es sich immer wieder bewährt zunächst semi-explizite DAEs zu betrachten. Aufgrund ihrer etwas einfacheren Struktur interessieren uns hier solche MR-DAEs, die aus Optimalsteuerungsproblemen mit gesteuerten, semi-expliziten Algebrodifferentialgleichungen entstehen. Zunächst betrachten wir die Eigenschaften von Optimalitäts-DAEs die zu diesen Optimalsteuerungsproblemen gehören. Anschließend wird die Riccati-Transformierte solcher Optimalitäts-DAEs genauer untersucht.

Die Eigenschaften der MR-DAEs, die aus Optimalitäts-DAEs mit regulärem Traktabilitätsindex 1 entstanden sind, spielen eine besondere Rolle. Aussagen über ihren Traktabilitätsindex interessieren uns besonders. Es seien wieder

$$S(t) = 0,\ V = 0 \text{ und } \widetilde{R}(t) \in L\left(\mathbb{R}^l\right),\ \widetilde{R}(t) > 0,\ \text{für alle } t \in \mathcal{I}. \tag{4.1}$$

Die Ausführungen sind von nun an punktweise in $t \in \mathcal{I}$ zu verstehen.

4.1 Optimalsteuerungsprobleme mit gesteuerten, semi-expliziten DAEs und ihre Optimalitäts-DAEs

Die zugrunde liegende gesteuerte DAE sei von semi-expliziter Form. Es seien $m \geq n$, $k \geq n$ und l beliebig aus $\mathbb{N}$. A und B haben die Form

$$A = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right), \qquad B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right) \tag{4.2}$$

und es seien

$$\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\scriptstyle n\times n} & {\scriptstyle n\times(m-n)} \\ {\scriptstyle (k-n)\times n} & {\scriptstyle (k-n)\times(m-n)} \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k\right), \\
D &= \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\scriptstyle n\times l} \\ {\scriptstyle (k-n)\times l} \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k\right), \\
W &= \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\scriptstyle n\times n} & {\scriptstyle n\times(m-n)} \\ {\scriptstyle (m-n)\times n} & {\scriptstyle (m-n)\times(m-n)} \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^m\right)
\end{aligned}$$

entsprechend partitioniert. Wir betrachten nun die DAE

$$\begin{cases} x_1' = C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + D_1 u \\ \ \ 0 = C_{21}x_1 + C_{22}x_2 + D_2 u \end{cases}$$

mit dem Kostenfunktional (2.1)

$$J(u,x) = \frac{1}{2}\int_0^T \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & 0 \\ W_{21} & W_{22} & \\ & 0 & \widetilde{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

und die zugehörige Optimalitäts-DAE (2.4)

$$\begin{cases} x_1' = C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + D_1u \\ 0 = C_{21}x_1 + C_{22}x_2 + D_2u \\ -\psi_1' = W_{11}x_1 + W_{12}x_2 + C_{11}^T\psi_1 + C_{21}^T\psi_2 \\ 0 = W_{21}x_1 + W_{22}x_2 + C_{12}^T\psi_1 + C_{22}^T\psi_2 \\ 0 = D_1^T\psi_1 + D_2^T\psi_2 + \widetilde{R}u. \end{cases} \tag{4.3}$$

Lemma 4.1 (Traktabilitätsindex der Optimalitäts-DAE). *Die Optimalitäts-DAE* (4.3) *ist regulär mit Traktabilitätsindex 1 genau dann, wenn die Bedingungen*

$$\ker \begin{pmatrix} C_{22}^T \\ D_2^T \end{pmatrix} = \{0\} \qquad \textit{und} \qquad \ker \begin{pmatrix} C_{22} \\ W_{22} \end{pmatrix} = \{0\} \tag{4.4}$$

erfüllt sind.

Beweis. Wir betrachten die Bedingungen (2.8a) und (2.8b) für regulären Traktabilitätsindex 1 dieser speziellen Optimalitäts-DAE. Zunächst ist

$$\widetilde{G}_0 = AB = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{G}_0^T \qquad \text{und} \qquad \widetilde{\mathcal{Q}}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix} = \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0}.$$

Dabei ist $\widetilde{\mathcal{Q}}_0$ Projektor auf $\ker \widetilde{G}_0$ und $\widetilde{\mathcal{Q}}_{*0}$ Projektor auf $\ker \widetilde{G}_0^T$. In diesem Fall gilt (2.8a) und (2.8b)

$$\begin{aligned} &\leftrightarrow \quad \ker \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ C_{12}^T & C_{22}^T \\ D_1^T & D_2^T \end{pmatrix} = \{0\}, \qquad \ker \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} \\ 0 & 0 \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \{0\} \\ &\leftrightarrow \quad \ker \begin{pmatrix} C_{22}^T \\ D_2^T \end{pmatrix} = \{0\}, \qquad \ker \begin{pmatrix} C_{22} \\ W_{22} \end{pmatrix} = \{0\}. \end{aligned}$$

□

4.2 Traktabilitätsindex der dazugehörigen MR-DAE

Die MR-DAEs, die aus Optimalitäts-DAEs der Form (4.3) entstehen, sind immer proper formuliert. Es ist nämlich $\ker B^T = \ker \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} = \{0\}$ (vgl. Satz 3.2).

Zusätzlich zu den oben gewählten Bezeichnungen seien nun auch

$$D\widetilde{R}^{-1}D^T = R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\scriptstyle n\times n} & {\scriptstyle n\times(k-n)} \\ {\scriptstyle (k-n)\times n} & {\scriptstyle (k-n)\times(k-n)} \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^k\right) \quad \text{und}$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\scriptstyle n\times n} \\ {\scriptstyle k-n\times n} \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right)$$

entsprechend partitioniert. Wir betrachten die zugehörige MR-DAE. Es ist

$$
\begin{aligned}
&-\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \right)' \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11}^T & C_{21}^T \\ C_{12}^T & C_{22}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad - \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \widetilde{R}^{-1} \begin{pmatrix} D_1^T & D_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
-\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} X_1' \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11}^T & C_{21}^T \\ C_{12}^T & C_{22}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \widetilde{R}^{-1} \begin{pmatrix} D_1^T & D_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
-\begin{pmatrix} X_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_1^T C_{11} + X_2^T C_{21} & X_1^T C_{12} + X_2^T C_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} C_{11}^T X_1 + C_{21}^T X_2 & 0 \\ C_{12}^T X_1 + C_{22}^T X_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} X_1^T D_1 + X_2^T D_2 \\ 0 \end{pmatrix} \widetilde{R}^{-1} \begin{pmatrix} D_1^T X_1 + D_2^T X_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
-\begin{pmatrix} X_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_1^T C_{11} + X_2^T C_{21} & X_1^T C_{12} + X_2^T C_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} C_{11}^T X_1 + C_{21}^T X_2 & 0 \\ C_{12}^T X_1 + C_{22}^T X_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} \left(X_1^T D_1 + X_2^T D_2\right) \widetilde{R}^{-1} \left(D_1^T X_1 + D_2^T X_2\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
-X_1' &= X_1^T C_{11} + X_2^T C_{21} + C_{11}^T X_1 + C_{21}^T X_2 \\
&\quad - \left(X_1^T D_1 + X_2^T D_2\right) \widetilde{R}^{-1} \left(D_1^T X_1 + D_2^T X_2\right) + W_{11}
\end{aligned} \tag{4.5a}
$$

$$0 = X_1^T C_{12} + X_2^T C_{22} + W_{12} \tag{4.5b}$$
$$0 = C_{12}^T X_1 + C_{22}^T X_2 + W_{21} \tag{4.5c}$$
$$0 = W_{22}. \tag{4.5d}$$

Aus (4.5) und den Bedingungen (4.4) für regulären Traktabilitätsindex 1 der Optimalitäts-DAE ergibt sich direkt der folgende Zusammenhang.

Bemerkung 4.2.

1. Die Bedingung (4.5d) ist für die Lösbarkeit der MR-DAE (4.5) notwendig.
2. Die Optimalitäts-DAE (4.3) sei regulär mit Traktabilitätsindex 1 und die Konsistenzbedingung (4.5d) sei erfüllt. Dann gilt: $\ker C_{22} = \{0\}$ und $\ker \begin{pmatrix} C_{22}^T \\ D_2^T \end{pmatrix} = \{0\}$.
3. Es sei $\ker C_{22}^T = \{0\}$.
   - Für $m = k$ gilt: C_{22} ist regulär und die Optimalitäts-DAE hat regulären Traktabilitätsindex 1, unabhängig von D_2 und W_{22}.
   - Für $m \neq k$ gilt: Falls die Konsistenzbedingung $W_{22} = 0$ erfüllt ist, so hat die Optimalitäts-DAE nie regulären Traktabilitätsindex 1.
4. Die Gleichungen (4.5b) und (4.5c) sind identisch. Es gilt nämlich

   $$X_1^T C_{12} + X_2^T C_{22} + W_{12} = \left(C_{12}^T X_1 + C_{22}^T X_2 + W_{21}\right)^T .$$

   Unter der Konsistenzbedingung $W_{22} = 0$ hat die matrixwertige, nichtlineare DAE

   $$\begin{aligned} -X_1' =& X_1^T C_{11} + X_2^T C_{21} + C_{11}^T X_1 + C_{21}^T X_2 \\ &- \left(X_1^T D_1 + X_2^T D_2\right) \widetilde{R}^{-1} \left(D_1^T X_1 + D_2^T X_2\right) + W_{11} \end{aligned} \tag{4.6a}$$
   $$0 = C_{12}^T X_1 + C_{22}^T X_2 + W_{21} \tag{4.6b}$$

   daher dieselbe Lösungsmenge wie (4.5).

Satz 4.3 (Traktabilitätsindex der MR-DAE (4.5)**).**

1. *Es sei* $\ker C_{22}^T = \{0\}$. *Dann ist die MR-DAE* (4.5) *singulär mit Traktabilitätsindex 1. Die DAE* (4.6) *hat regulären Traktabilitätsindex 1 und ist daher eindeutig lösbar. Falls* $W_{22} = 0$ *ist, hat sie dieselbe Lösungsmenge wie* (4.5).
2. *Es sei* $\ker C_{22}^T \neq \{0\}$. *Die Bedingungen für regulären Traktabilitätsindex 1 der Optimalitäts-DAE* (4.4) *sind im Allgemeinen nicht hinreichend für singulären Traktabilitätsindex 1 der MR-DAE. Zusätzlich ist für* $m = k$ *die MR-DAE nicht lösbar, falls die Optimalitäts-DAE regulären Traktabilitätsindex 1 hat.*

Beweis. Wir betrachten den Teil der Matrixkette, der für die Analyse des singulären Traktabilitätsindexes 1 der MR-DAE notwendig ist.

- Es ist

$$\begin{aligned}
G_0 &= \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^{nk}, \mathbb{R}^{m^2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0_{(m^2-mn)\times k} & \dots & 0_{(m^2-mn)\times k} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ $\operatorname{rg} G_0 = n^2$.

Damit folgt

$$N_0 = \left\{ z = (z_1, \dots, z_{kn}) \in \mathbb{R}^{kn} \;\middle|\; \begin{array}{r} \forall\, 1 \le j \le n,\, 1 \le i \le n : \\ z_{(j-1)k+i} = 0 \end{array} \right\}$$

und

$$\begin{aligned}
Q_0 &= I_n \otimes \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 0 \\ 0 & I_{k-n} \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^{nk}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 0 \\ 0 & I_{k-n} \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{k-n} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

- Als nächstes wird

$$B_0 = (P(m,m) + I_{m^2}) \left[\left(B^T \otimes C^T\right) - \left(B^T \otimes B^T X^T R\right) \right]$$

ermittelt. Dazu betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned}
\left(B^T \otimes C^T\right) - \left(B^T \otimes B^T X^T R\right) &= \left(\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \otimes C^T \right) - \left(\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} X^T R \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \otimes C^T \right) - \left(\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} X^T R \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \left(C^T - \begin{pmatrix} X^T R \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} C^T - \begin{pmatrix} X^T R \\ 0 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & C^T - \begin{pmatrix} X^T R \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es sei $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{1\,1} & t_{1\,2} \\ \vdots & \vdots \\ t_{m\,1} & t_{m\,2} \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$. Für $1 \le i \le m$ ist $t_{i\,1} \in \mathbb{R}^n,\ t_{i\,2} \in \mathbb{R}^{k-n}$ und $t_i := \begin{pmatrix} t_{i\,1} & t_{i\,2} \end{pmatrix}$. Dabei wird T wie folgt festgelegt

$$t_{i\,1} := \begin{cases} \begin{pmatrix} c_{1i} - \sum_{j=1}^m x_{ji} r_{j1} & ,\ldots, & c_{ni} - \sum_{j=1}^m x_{ji} r_{jn} \end{pmatrix} & \text{, falls } 1 \le i \le n \\ \begin{pmatrix} c_{1i} & ,\ldots, & c_{ni} \end{pmatrix} & \text{, falls } n+1 \le i \le m \end{cases}$$

und

$$t_{i\,2} := \begin{cases} \begin{pmatrix} c_{(n+1)i} - \sum_{j=1}^m x_{ji} r_{j(n+1)} & ,\ldots, & c_{ki} - \sum_{j=1}^m x_{ji} r_{jk} \end{pmatrix} & \text{, falls } 1 \le i \le n \\ \begin{pmatrix} c_{(n+1)i} & ,\ldots, & c_{ki} \end{pmatrix} & \text{, falls } n+1 \le i \le m. \end{cases}$$

Dann gilt $T = C^T - \begin{pmatrix} X^T R \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t_{n+1\,1} \\ \vdots \\ t_{m\,1} \end{pmatrix} = C_{12}^T$ und $\begin{pmatrix} t_{n+1\,2} \\ \vdots \\ t_{m\,2} \end{pmatrix} = C_{22}^T$. Mit dieser Definition können wir nun übersichtlicher weiter rechnen. Es ist

$$\left(B^T \otimes C^T\right) - \left(B^T \otimes B^T X^T R\right) = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ \vdots & & \\ t_m & & \\ & \ddots & \\ & & t_1 \\ & & \vdots \\ & & t_m \\ 0_{(m^2-mn)\times k} & \ldots & 0_{(m^2-mn)\times k} \end{pmatrix}$$

und mit Lemma A.12 folgt

$$\begin{aligned} B_0 &= P\left(m,m\right)\left[\left(B^T \otimes C^T\right) - \left(B^T \otimes B^T X^T R\right)\right] \\ &= \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_1 \\ 0_{(m-n)\times k} & \ldots & 0_{(m-n)\times k} \\ & & \\ & \vdots & \\ t_m & & \\ & \ddots & \\ & & t_m \\ 0_{(m-n)\times k} & \ldots & 0_{(m-n)\times k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- So ergibt sich

$$B_0 \mathcal{Q}_0 = \left(P\left(m,m\right) + I_{m^2}\right)\left[\left(B^T \otimes C^T\right) - \left(B^T \otimes B^T X^T R\right)\right] \mathcal{Q}_0$$

$$
= \left(P\left(m,m\right)+I_{m^2}\right)\left(\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & C_{21}^T - X^T \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \end{pmatrix} \\ 0 & C_{22}^T \end{pmatrix}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccc}
0 & 2t_{1\,2} & & & \\
 & \vdots & \ddots & & \\
0 & t_{n\,2} & & 0 & t_{1\,2} \\
 & \vdots & & & \\
0 & t_{m\,2} & & & \\
 & & & & \\
 & & \vdots & & \\
0 & t_{n\,2} & & 0 & t_{1\,2} \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & 0 & 2t_{n\,2} \\
 & & & & \vdots \\
 & & & 0 & t_{m\,2} \\
0 & t_{n+1\,2} & & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & 0 & t_{n+1\,2} \\
\multicolumn{2}{c}{0_{(m-n)\times k}} & \cdots & \multicolumn{2}{c}{0_{(m-n)\times k}} \\
 & & \vdots & & \\
 & & & & \\
0 & t_{m\,2} & & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & 0 & t_{m\,2} \\
\multicolumn{2}{c}{0_{(m-n)\times k}} & \cdots & \multicolumn{2}{c}{0_{(m-n)\times k}}
\end{array}\right)
$$

und

$$
G_1 = G_0 + B_0 \mathcal{Q}_0 \in L\left(\mathbb{R}^{nk}, \mathbb{R}^{m^2}\right)
$$

$$
= \begin{pmatrix}
 & 2t_{1\,2} & & & \\
I_n & \vdots & \ddots & & \\
 & t_{n\,2} & & 0 & t_{1\,2} \\
0 & t_{n+1\,2} & & & \\
\vdots & \vdots & & & \\
0 & t_{m\,2} & & & \\
 & & \vdots & & \\
0 & t_{n\,2} & & & t_{1\,2} \\
 & & \ddots & I_n & \vdots \\
 & & & & 2t_{n\,2} \\
 & & & 0 & t_{n+1\,2} \\
 & & & & \vdots \\
 & & & 0 & t_{m\,2} \\
0 & t_{n+1\,2} & & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & 0 & t_{n+1\,2} \\
0_{(m-n)\times n} & 0_{(m-n)\times k-n} & \cdots & 0_{(m-n)\times n} & 0_{(m-n)\times k-n} \\
 & & \vdots & & \\
0 & t_{m\,2} & & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & 0 & t_{m\,2} \\
0_{(m-n)\times n} & 0_{(m-n)\times k-n} & \cdots & 0_{(m-n)\times n} & 0_{(m-n)\times k-n}
\end{pmatrix}
$$

$$
=: \begin{pmatrix} G_{1\,1} \\ G_{1\,2} \end{pmatrix}, \text{ wobei } G_{1\,1} \in L\left(\mathbb{R}^{kn}, \mathbb{R}^{mn}\right),\ G_{1\,2} \in L\left(\mathbb{R}^{kn}, \mathbb{R}^{m^2-mn}\right).
$$

$$
\begin{aligned}
\rightarrow\ \operatorname{rg} G_1 &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} G_{1\,1} \\ G_{1\,2} \end{pmatrix} = \operatorname{rg} G_{1\,1} \\
&= n^2 + n \operatorname{rg}\left(C_{22}^T\right).
\end{aligned}
$$

Es ist also $\ker G_1 = \{0\} \leftrightarrow \operatorname{rg} G_1 = kn \leftrightarrow \operatorname{rg} C_{22} = k - n \leftrightarrow \ker C_{22}^T = \{0\}$. Wir betrachten nun die verschiedenen Fälle.

1. Es sei $\ker C_{22}^T = \{0\}$. Dann folgt $N_1 = \{0\}$ und $\mathcal{Q}_1 = 0$.

   $$
   \begin{aligned}
   &\rightarrow N_0 \ominus (N_0 \cap N_1) = N_0 \subseteq \mathbb{R}^{nk} = \ker \mathcal{Q}_1 \\
   &\rightarrow D_0 \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1 D_0^- = \mathcal{R} \text{ nur von } t \text{ abhängig und stetig differenzierbar} \\
   &\rightarrow G_0 \neq G_1 = G_2.
   \end{aligned}
   $$

Daher hat die MR-DAE singulären Traktabilitätsindex 1, falls $\ker C_{22}^T = \{0\}$.

Wir betrachten die DAE (4.6)

$$\begin{aligned}
-X_1' =& X_1^T C_{11} + X_2^T C_{21} + C_{11}^T X_1 + C_{21}^T X_2 \\
&- \left(X_1^T D_1 + X_2^T D_2\right) \widetilde{R}^{-1} \left(D_1^T X_1 + D_2^T X_2\right) + W_{11} \\
0 =& C_{12}^T X_1 + C_{22}^T X_2 + W_{21}.
\end{aligned}$$

unter der Bedingung $\ker C_{22}^T = \{0\}$. Wir legen fest

$$\begin{aligned}
f_1(X_1, X_2) :=& \operatorname{vec}\left(X_1^T C_{11} + X_2^T C_{21} + C_{11}^T X_1 + C_{21}^T X_2\right) \\
&- \operatorname{vec}\left(\left(X_1^T D_1 + X_2^T D_2\right) \widetilde{R}^{-1} \left(D_1^T X_1 + D_2^T X_2\right) + W_{11}\right), \\
f_2(X_1, X_2) :=& \operatorname{vec}\left(C_{12}^T X_1 + C_{22}^T X_2 + W_{21}\right) \\
=& \left(I_n \otimes C_{12}^T\right) \operatorname{vec} X_1 + \left(I_n \otimes C_{22}^T\right) \operatorname{vec} X_2 + \operatorname{vec} W_{21}
\end{aligned}$$

Dann lässt sich (4.6) in vektorisierter Form und properer Formulierung kompakt als

$$\begin{pmatrix} I_{n^2} \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} I_{n^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{vec} X_1 \\ \operatorname{vec} X_2 \end{pmatrix} \right)' = \begin{pmatrix} f_1(X_1, X_2) \\ f_2(X_1, X_2) \end{pmatrix}$$

schreiben. Wir erhalten weiter

$$\begin{aligned}
G_0 &= \begin{pmatrix} I_{n^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist nicht regulär} \\
B_0 &= \begin{pmatrix} [f_1(X_1, X_2)]_{\operatorname{vec} X_1} & [f_1(X_1, X_2)]_{\operatorname{vec} X_2} \\ I_n \otimes C_{12}^T & I_n \otimes C_{22}^T \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und es folgt mit $\ker C_{22} = \{0\}$

$$\begin{aligned}
N_0 \cap S_0 =& \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nk}, \begin{array}{l} x_1 \in \mathbb{R}^{n^2}, \\ x_2 \in \mathbb{R}^{nk-n^2} \end{array} \middle| \, x_1 = 0 \right\} \\
&\cap \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nk}, \begin{array}{l} x_1 \in \mathbb{R}^{n^2}, \\ x_2 \in \mathbb{R}^{nk-n^2} \end{array} \middle| \, \left(I_n \otimes C_{12}^T\right) x_1 + \left(I_n \otimes C_{22}^T\right) x_2 = 0 \right\} \\
=& \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nk}, \begin{array}{l} x_1 \in \mathbb{R}^{n^2}, \\ x_2 \in \mathbb{R}^{nk-n^2} \end{array} \middle| \, \begin{array}{rl} x_1 &= 0, \\ \left(I_n \otimes C_{22}^T\right) x_2 &= 0 \end{array} \right\} \\
=& \{0_{nk}\}.
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Das Teilsystem (4.6) ist unter $\ker C_{22} = \{0\}$ regulär mit Traktabilitätsindex 1. Falls $W_{22} = 0$ ist, so ist (4.6) äquivalent zu (4.5) (vgl. Bemerkung 4.2).

2. Es sei nun $\ker C_{22}^T \neq \{0\}$.

   - Die Bedingungen (4.4) für regulären Traktabilitätsindex der Optimalitäts-DAE sind im Allgemeinen nicht hinreichend für singulären Traktabilitätsindex 1 der MR-DAE (vgl. Beispiel 9 Fall 2 in Abschnitt 4.3).

- Zusätzlich sei nun $m = k$ und die Optimalitäts-DAE habe regulären Traktabilitätsindex 1. Aus $\ker \begin{pmatrix} C_{22} \\ W_{22} \end{pmatrix} = \{0\}$ aus (4.4) folgt dann: $W_{22} \neq 0$. Andererseits ist die MR-DAE für $W_{22} \neq 0$ nicht lösbar (vgl. Bemerkung 4.2).

□

Die Bedingung $W_{22} = 0$ ist also einerseits notwendig für die Lösbarkeit der MR-DAE. Andererseits folgt mit $\ker C_{22}^T = \{0\}$, dass nur der Teil der Algebrodifferentialgleichung bewertet wird, der Ableitungen enthält. Daher ist es durchaus sinnvoll nur diesen Teil zu steuern und $D = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $D_2 = 0$, zu wählen.

4.3 Einige Beispiele

Beispiel 9 (Ein kleines Beispiel). Seien jetzt $m = k = 2, n = 1$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = B^T \otimes B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
D_0 &= I_1 \otimes A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_0^- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R} = D_0 D_0^- = 1, \\
G_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_0 = \left\{ z = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^2 \middle| \, z_1 = 0 \right\}, \\
\mathcal{Q}_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Für $B_0,\ G_1,\ N_1$ ergibt sich damit

$$
\begin{aligned}
B_0 &= (P(m,m) + I_{m^2}) \left[\left(B^T \otimes C^T \right) - \left(B^T \otimes B^T X^T R \right) \right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + I_4 \right] \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes C^T - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} R \right] \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R \right] \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 r_{11} + x_2 r_{21} & x_1 r_{12} + x_2 r_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 2\left(c_{11} - x_1 r_{11} - x_2 r_{21}\right) & 2\left(c_{21} - x_1 r_{12} - x_2 r_{22}\right) \\ c_{12} & c_{22} \\ c_{12} & c_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
G_1 &= G_0 + B_0 \mathcal{Q}_0 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\left(c_{11} - x_1 r_{11} - x_2 r_{21}\right) & 2\left(c_{21} - x_1 r_{12} - x_2 r_{22}\right) \\ c_{12} & c_{22} \\ c_{12} & c_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2\left(c_{21} - x_1 r_{12} - x_2 r_{22}\right) \\ 0 & c_{22} \\ 0 & c_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und

$$N_1 = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \middle| \, z_1 = -2\left(c_{21} - x_1 r_{12} - x_2 r_{22}\right) z_2, \ c_{22} z_2 = 0 \right\}.$$

1. Fall Für den Spezialfall $c_{22} \neq 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \{0\}, \qquad\qquad \mathcal{Q}_1 = 0, \\
G_2 &= G_1 + B_1 \mathcal{Q}_1 = G_1, \quad \ker \mathcal{Q}_1 = \mathbb{R}^2 \text{ und} \\
D_0 \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1 D_0^- &= D_0 D_0^- D_0 I_2 D_0^- = D_0 D_0^- = \mathcal{R} = 1,
\end{aligned}
$$

wobei $\mathcal{R}$ unabhängig von x und stetig nach t differenzierbar ist.

→ Für $c_{22} \neq 0$ ist die Gleichung singulär mit Traktabilitätsindex 1.

2. Fall Für den Fall $c_{22} = 0$ kann Index 1 nicht garantiert werden. Um dies zu verdeutlichen betrachten wir den folgenden, akademischen Fall. Es sei $c_{22} = c_{12} = c_{21} = 0$ und $R = I$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \middle| \, z_1 = 2 x_2 z_2 \right\}, \\
\mathcal{Q}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2x_2} & 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2x_2} & 1 \end{pmatrix}, \\
D_0 \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1 D_0^- &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2x_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2x_2} \end{pmatrix} \\
&= 0, \\
B_1 &= \begin{pmatrix} 2\left(c_{11} - x_1\right) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und} \\
G_2 &= G_1 + B_1 \mathcal{Q}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 + 2\left(c_{11} - x_1\right) & -2x_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\neq G_1.
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ Für $c_{22} = 0$ hat die Gleichung im Allgemeinen nicht Index 1.

Beispiel 10 (Ein etwas größeres Beispiel). Es seinen $m = k = 4$ und $n = 2$. Dann ist

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{41} & \cdots & c_{44} \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^4\right), \qquad C_{22} = \begin{pmatrix} c_{33} & c_{34} \\ c_{43} & c_{44} \end{pmatrix},
$$

$$
A_0 = \begin{pmatrix} B^T & 0_{4\times 2} \\ 0_{4\times 2} & B^T \\ 0_{8\times 2} & 0_{8\times 2} \end{pmatrix}, \qquad D_0 = \begin{pmatrix} A^T & 0_{2\times 4} \\ 0_{2\times 4} & A^T \end{pmatrix},
$$

$$
G_0 = \begin{pmatrix} B^T A^T & 0_{4\times 4} \\ 0_{4\times 4} & B^T A^T \\ 0_{8\times 4} & 0_{8\times 4} \end{pmatrix}, \qquad B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0} & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\mathcal{Q}}_{*0} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}
$$

und

$$
N_0 = \left\{ z = \left(z_1, \ldots, z_8\right)^T \in \mathbb{R}^8 \,\middle|\, z_1 = z_2 = z_5 = z_6 = 0 \right\}.
$$

Als nächstes berechnen wir B_0. Dazu betrachten wir zunächst

$$
\begin{aligned}
&\left(B^T \otimes C^T\right) - \left(B^T \otimes B^T X^T R\right) \\
&\quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes C^T - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^T R \\
&\quad = \begin{pmatrix} C^T & 0_{4\times 4} \\ 0_{4\times 4} & C^T \\ 0_{4\times 4} & 0_{4\times 4} \\ 0_{4\times 4} & 0_{4\times 4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} X^T R \\ 0_{2\times 4} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} C^T & 0_{4\times4} \\ 0_{4\times4} & C^T \\ 0_{4\times4} & 0_{4\times4} \\ 0_{4\times4} & 0_{4\times4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X^TR & 0_{2\times4} \\ 0_{2\times4} & 0_{2\times4} \\ 0_{2\times4} & X^TR \\ 0_{2\times4} & 0_{2\times4} \\ 0_{2\times4} & 0_{2\times4} \\ 0_{2\times4} & 0_{2\times4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C^T - \begin{pmatrix} X^TR \\ 0_{2\times4} \end{pmatrix} & 0_{4\times4} \\ 0_{4\times4} & C^T - \begin{pmatrix} X^TR \\ 0_{2\times4} \end{pmatrix} \\ 0_{4\times4} & 0_{4\times4} \\ 0_{4\times4} & 0_{4\times4} \end{pmatrix}.$$

Sei nun

$$T = \begin{pmatrix} t_{1\,1} & t_{1\,2} \\ t_{2\,1} & t_{2\,2} \\ t_{3\,1} & t_{3\,2} \\ t_{4\,1} & t_{4\,2} \end{pmatrix}, \quad t_{i\,j} \in \mathbb{R}^2, \quad 1 \le i \le 4, \quad 1 \le j \le 2,$$

$$t_i := \begin{pmatrix} t_{i\,1} & t_{i\,2} \end{pmatrix}, \qquad \text{für } 1 \le i \le 4$$

mit

$$t_{i\,1} := \begin{cases} \begin{pmatrix} c_{1i} - \sum_{j=1}^4 x_{ji} r_{j1} & c_{2i} - \sum_{j=1}^4 x_{ji} r_{j2} \end{pmatrix} & \text{, falls } i \in \{1,2\} \\ \begin{pmatrix} c_{1i} & c_{2i} \end{pmatrix} & \text{, falls } i \in \{3,4\} \end{cases}$$

und

$$t_{i\,2} := \begin{cases} \begin{pmatrix} c_{3i} - \sum_{j=1}^4 x_{ji} r_{j3} & c_{4i} - \sum_{j=1}^4 x_{ji} r_{j4} \end{pmatrix} & \text{, falls } i \in \{1,2\} \\ \begin{pmatrix} c_{3i} & c_{4i} \end{pmatrix} & \text{, falls } i \in \{3,4\}\,. \end{cases}$$

Dann ist

$$T = \begin{pmatrix} C^T - \begin{pmatrix} X^TR & \\ 0_{2\times4} & \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

und

$$B_0 = \left[P\left(m,m\right) + I_{m^2}\right]\left[\left(B^T \otimes C^T\right) - \left(B^T \otimes B^T X^T R\right)\right] = \begin{pmatrix} 2t_1 & \\ t_2 & t_1 \\ t_3 & \\ t_4 & \\ t_2 & t_1 \\ & 2t_2 \\ & t_3 \\ & t_4 \\ t_3 & \\ & t_3 \\ & \\ & \\ t_4 & \\ & t_4 \\ & \\ & \end{pmatrix}.$$

Es folgt weiter

$$B_0 \mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2t_{1\,2} & & \\ 0 & t_{2\,2} & 0 & t_{1\,2} \\ 0 & t_{3\,2} & & \\ 0 & t_{4\,2} & & \\ 0 & t_{2\,2} & 0 & t_{1\,2} \\ & & 0 & 2t_{2\,2} \\ & & 0 & t_{3\,2} \\ & & 0 & t_{4\,2} \\ 0 & t_{3\,2} & & \\ & & 0 & t_{3\,2} \\ & & & \\ & & & \\ 0 & t_{4\,2} & & \\ & & 0 & t_{4\,2} \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2t_{1\,2} & & \\ 0 & t_{2\,2} & 0 & t_{1\,2} \\ 0 & C_{22}^T & & \\ 0 & t_{2\,2} & 0 & t_{1\,2} \\ & & 0 & 2t_{2\,2} \\ & & 0 & C_{22}^T \\ 0 & t_{3\,2} & & \\ & & 0 & t_{3\,2} \\ & & & \\ & & & \\ 0 & t_{4\,2} & & \\ & & 0 & t_{4\,2} \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

und G_1=

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 2\left(c_{31}-\sum_{j=1}^{4} x_{j1}r_{j3} \;\; c_{41}-\sum_{j=1}^{4} x_{j1}r_{j4} \right) & & & 0 \\
0 & 1 & c_{32}-\sum_{j=1}^{4} x_{j2}r_{j3} \;\; c_{42}-\sum_{j=1}^{4} x_{j2}r_{j4} & & & c_{31}-\sum_{j=1}^{4} x_{j1}r_{j3} \;\; c_{41}-\sum_{j=1}^{4} x_{j1}r_{j4} \\
 & & \begin{pmatrix} c_{33} & c_{43} \\ c_{34} & c_{44} \end{pmatrix} & & & \\
 & & c_{32}-\sum_{j=1}^{4} x_{j2}r_{j3} \;\; c_{42}-\sum_{j=1}^{4} x_{j2}r_{j4} & 1 & 0 & c_{31}-\sum_{j=1}^{4} x_{j1}r_{j3} \;\; c_{41}-\sum_{j=1}^{4} x_{j1}r_{j4} \\
 & & 0 & 0 & 1 & 2\left(c_{32}-\sum_{j=1}^{4} x_{j2}r_{j3} \;\; c_{42}-\sum_{j=1}^{4} x_{j2}r_{j4} \right) \\
 & & & & & \begin{pmatrix} c_{33} & c_{43} \\ c_{34} & c_{44} \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} c_{33} & c_{43} \end{pmatrix} & & & \\
 & & & & & \begin{pmatrix} c_{33} & c_{43} \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} c_{34} & c_{44} \end{pmatrix} & & & \\
 & & & & & \begin{pmatrix} c_{34} & c_{44} \end{pmatrix}
\end{pmatrix}.$$

Daher ist $\ker G_1 = \{0\}$ genau dann, wenn $\ker \left(\begin{smallmatrix} c_{33} & c_{43} \\ c_{34} & c_{44} \end{smallmatrix} \right) = \ker C_{22}^T = \{0\}$, also C_{22} regulär ist. Dann folgt $N_0 \ominus (N_0 \cap N_1) = N_0 \subseteq \mathbb{R}^8 = \ker \mathcal{Q}_1$ und die Gleichung hat singulären Traktabilitätsindex 1.

Im Falle $\ker C_{22} \neq \{0\}$ ist die Gleichung auch hier im Allgemeinen nicht singulär mit Traktabilitätsindex 1.

4.4 Ein konkretes Optimalsteuerungsproblem mit einer gesteuerten, semi-expliziten DAE

Das folgende Steuerungsproblem und die zugehörige Optimalitäts- und Riccati-DAE wurden bereits in [KM97] auf ihre Lösbarkeit und Indexeigenschaften untersucht. Die Analyse erfolgte dort jedoch nicht auf Grundlage der hier eingeführten Theorie. Die propere Formulierung und der singuläre Traktabilitätsindex ermöglichen nun eine neue Betrachtung der semi-expliziten DAE

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\
x_1(0) &= 1
\end{aligned} \tag{4.7a}$$

mit dem Kostenfunktional

$$\begin{aligned}
J(u,x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{pmatrix} \right\rangle dt, \\
\alpha, \beta &\geq 0.
\end{aligned} \tag{4.7b}$$

Es sind dabei

$$n = 1, \qquad m = k = 2, \qquad l = 1,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad W = \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{R} = 1,$$

$$S = 0, \qquad V = 0, \qquad R = D\widetilde{R}^{-1}D^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die zu (4.7) gehörige Optimalitäts-DAE hat die Struktur

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ u \end{pmatrix} \right)' = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & c_{21} & 0 \\ 0 & \beta & c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ u \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(T) \\ \psi_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1' \\ 0 \\ -\psi_1' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}x_2 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + u \\ \alpha x_1 + c_{21}\psi_2 \\ \beta x_2 + c_{12}\psi_1 + c_{22}\psi_2 \\ \psi_2 + u \end{pmatrix} \\ x_1(0) = 1 \\ \psi_1(1) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Weiterhin ist $\mathcal{M}_0 = \left\{ z \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{aligned} c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + z_4 &= 0 \\ \beta z_2 + c_{12}z_3 + c_{22}z_4 &= 0 \\ z_4 + z_5 &= 0 \end{aligned} \right\}$.

Um mehr über die Bedingungen zu erfahren, unter denen die Optimalitäts-DAE (4.8) regulären Traktabilitätsindex 1 hat, betrachten wir die Matrixkette der gesteuerten DAE. Es sind

$$\widetilde{G}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{Q}_0^T = \widetilde{Q}_{*0},$$

$$\widetilde{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Damit lassen sich die Bedingungen (2.8a) und (2.8b) für regulären Traktabilitätsindex 1 wie folgt vereinfachen.

$$(2.8a) \qquad \leftrightarrow \qquad \{0\} = \ker \begin{pmatrix} \widetilde{G}_0^T \\ \widetilde{Q}_0 C^T \\ D^T \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$(2.8b) \qquad \leftrightarrow \qquad \{0\} = \ker \begin{pmatrix} \widetilde{G}_0 \\ \widetilde{Q}_{*0} C \\ \widetilde{Q}_0 W \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Da $\beta \geq 0$ ist, ist die Optimalitäts-DAE (4.8) genau dann regulär mit Traktabilitätsindex 1, wenn $c_{22}^2 + \beta \neq 0$ (d. h. $c_{22} \neq 0$ oder $\beta > 0$). Dann ist sie auch eindeutig lösbar.

Die daraus resultierende MR-DAE erhält mit $X := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ die Gestalt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \right)' \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(1) \\ \xi_2(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \xi_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \xi_2 c_{12} & \xi_1 c_{21} + \xi_2 c_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{12}\xi_2 & 0 \\ c_{21}\xi_1 + c_{22}\xi_2 & 0 \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} \xi_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \\
\xi_1(1) = & 0.
\end{aligned}$$

Für die vektorisierte MR-DAE (3.2) erhält man

$$\begin{aligned}
- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \right)' = \begin{pmatrix} 2c_{21}\xi_2 \\ c_{12}\xi_1 + c_{22}\xi_2 \\ c_{12}\xi_1 + c_{22}\xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_2\xi_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \\
\xi_1(1) = 0
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_{21}\xi_2 + \alpha - \xi_2^2 \\ c_{12}\xi_1 + c_{22}\xi_2 \\ c_{12}\xi_1 + c_{22}\xi_2, \\ \beta \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

$$\xi_1(1) = 0.$$

Da

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{r} c_{12}z_1 + c_{22}z_2 = 0 \\ \beta = 0 \end{array} \right\}$$

ist, ist die MR-DAE für $W_{22} = \beta \neq 0$ nicht lösbar.

Im Folgenden soll der Traktabilitätsindex der vektorisierten MR-DAE untersucht werden. Dazu betrachten wir die zugehörige Matrixkette. Es ist

$$\begin{aligned}
G_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
N_0 &= \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, z_1 = 0 \right\}, \\
\mathcal{Q}_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
B_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 2c_{21} - 2\xi_2 \\ c_{12} & c_{22} \\ c_{12} & c_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
G_1 &= G_0 + B_0\mathcal{Q}_0 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2c_{21} - 2\xi_2 \\ c_{12} & c_{22} \\ c_{12} & c_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2c_{21} - 2\xi_2 \\ 0 & c_{22} \\ 0 & c_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die verschiedenen Fälle getrennt.

1. Fall $c_{22} \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg} G_1 &= 2 = \text{konstant}, \\
N_0 \ominus (N_0 \cap N_1) &= N_0 \ominus \{0\} = N_0 \subseteq \mathbb{R}^2 = \ker \mathcal{Q}_1, \\
\ker G_1 &= N_1 = \{0\} \quad \rightarrow \quad \mathcal{Q}_1 = 0 \in C(\mathcal{I}, L(\mathbb{R}^m)), \\
\mathcal{P}_1 &= I_2 \quad \rightarrow \quad D_0\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1 D_0^- = \text{konstant} \in C^1(\mathcal{I}, L(\mathbb{R}^m)), \\
G_2 &= G_1 \neq G_0, \text{ singulär}.
\end{aligned}$$

   $\rightarrow$ Für $c_{22} \neq 0$ ist die MR-DAE singulär mit Traktabilitätsindex 1.

2. Fall Für $c_{22} = 0$ gilt auf der Ebene $\xi_2 = c_{21}$, dass $G_0 = G_1$ ist. Dort hat die DAE singulären Traktabilitätsindex 0.

3. Für $c_{22} = 0$ und außerhalb der Ebene $\xi_2 = c_{21}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg} G_1 &= 1 = \text{konstant}, \\
G_1 &\neq G_0, \\
N_1 &= \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, z_1 + 2z_2\left(c_{21} - \xi_2\right) = 0 \right\}, \\
\mathcal{Q}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2(c_{21}-\xi_2)} & 0 \end{pmatrix}, \\
\ker \mathcal{Q}_1 &= \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, z_1 = 0 \right\} \supseteq N_0, \\
N_0 \ominus \left(N_0 \cap N_1\right) &= N_0 \ominus \{0\} = N_0 \subseteq \ker \mathcal{Q}_1, \\
B_1 = B_0 \mathcal{P}_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_{12} & 0 \\ c_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
B_1 \mathcal{Q}_1 &= B_1 \neq 0, \\
\rightarrow G_2 &\neq G_1.
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Für $c_{22} = 0$ hat die DAE dort weder singulären noch regulären Traktabilitätsindex 0 oder 1. Der Traktabilitätsindex für diese Gleichung ist entweder größer 1 oder er ist nicht definiert.

Schließlich soll die Lösbarkeit der Optimalitäts-DAE und der MR-DAE für den Spezialfall $c_{12} = c_{21} = 0$, $c_{22}^2 + \beta \neq 0$ untersucht werden. Wir betrachten die Optimalitäts-DAE und die MR-DAE nacheinander.

1. Die Optimalitäts-DAE hat die Struktur

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1' \\ 0 \\ -\psi_1' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ c_{22}x_2 + u \\ \alpha x_1 \\ \beta x_2 + c_{22}\psi_2 \\ \psi_2 + u \end{pmatrix}, \\
x_1(0) &= 1, \\
\psi_1(1) &= 0
\end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ z \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, \begin{array}{r} c_{22}z_2 - z_4 = 0 \\ \beta z_2 + c_{22}z_4 = 0 \\ z_4 + z_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Sie ist eindeutig lösbar. Die Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ (1-t)\,\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Die MR-DAE hat die Struktur

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \xi_2^2 \\ c_{22}\xi_2 \\ c_{22}\xi_2 \\ \beta \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$
$$\xi_1(1) = 0$$

und es ist

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{r} c_{22}z_2 = 0 \\ \beta = 0 \end{array} \right\}.$$

Sie ist

a) für $W_{22} = \beta \neq 0$ nicht lösbar.
b) für $\beta = 0$ lösbar und es folgt, aufgrund der Bedingungen für regulären Traktabilitätsindex 1 der Optimalitäts-DAE, dass $c_{22} \neq 0$ ist. Dann ist die MR-DAE singulär mit Traktabilitätsindex 1. $\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0$ ist Lösung der MR-DAE.

Falls die MR-DAE lösbar ist ($\beta = 0$), folgt in diesem Fall $\left(c_{12} = c_{21} = 0,\ c_{22}^2 + \beta \neq 0\right)$ sofort $c_{22} \neq 0$. Daher haben dann Optimalitäts-DAE und MR-DAE gleichzeitig Index 1. Allerdings hat die Optimalitäts-DAE regulären Traktabilitätsindex 1 und die MR-DAE, aufgrund der überflüssigen Gleichung, singulären Traktabilitätsindex 1.

Zusammenfassend können wir für dieses Beispiel folgendes feststellen.

- Aus einer regulären, eindeutig lösbaren Optimalitäts-DAE mit Traktabilitätsindex 1 haben wir hier via Riccati-Transformation singuläre, eventuell nicht lösbare MR-DAE erhalten.
- Falls die Lösbarkeitsvoraussetzung $\beta = 0$ erfüllt ist, ist die Optimalitäts-DAE regulär mit Traktabilitätsindex 1 genau dann, wenn die MR-DAE singulär mit Traktabilitätsindex 1 ist.
- Das Teilsystem

$$\left.\begin{aligned} \xi_1' &= \alpha - \xi_2^2 \\ 0 &= c_{22}\xi_2 \\ \xi_1(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

hat für $\beta = 0$ die selbe Lösungsmenge wie (4.10). Jedoch ist (4.11) sogar regulär mit Traktabilitätsindex 1, denn es gilt

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2\xi_2 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}.$$
$$\to G_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2\xi_2 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} \text{ ist regulär sobald } c_{22} \neq 0 \text{ ist.}$$

5 Numerische Bestimmung des Traktabilitätsindexes

In den vorangegangenen Kapiteln wurde der Traktabilitätsindex für spezielle quasilineare, singuläre DAEs eingeführt. Verschiedene Beispiele wurden dazu betrachtet. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Entwicklung eines Algorithmuses zur Bestimmung des Traktabilitätsindexes von proper formulierten, regulären und singulären DAEs mit niedrigem Traktabilitätsindex 0 bzw. 1.

Die Algorithmen von R. Lamour [Lam01] für die Bestimmung des Traktabilitätsindexes von regulären, linearen DAEs dienen als Grundlage für die Implementierung. Ebenso wie im regulären Fall kann auch der Index singulärer, nichtlinearer DAEs über ihre Linearisierung bestimmt werden. Beim Vergleich der Definitionen des singulären und regulären Traktabilitätsindexes wird klar, dass einige wichtige Bedingungen auf die neue Situation angepasst werden müssen.

Bei *regulären DAEs* sind die Matrizen G_0 und G_1 quadratisch. Für den Test auf Traktabilitätsindex $\mu = 1$ musste lediglich $G_1 = G_0 + B_0\mathcal{Q}_0$ ermittelt und auf Regularität getestet werden. Für den Test auf höheren, regulären Traktabilitätsindex konnte für die Konstruktion von $\mathcal{Q}_1$ die Nebenbedingung

$$\mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_1 = 0, \tag{5.1}$$

genutzt werden [Lam01]. Sie ist für $j = 1$ äquivalent zur Bedingung 2ii aus Definition 1.4 ($N_0 \subseteq \ker \mathcal{Q}_1$).

Bei *singulären DAEs* stellt sich die Situation nun etwas anders dar. $G_0 = A_0D_0$ ist eventuell nicht quadratisch. Zusätzlich ist die Bedingung (5.1) für singuläre DAEs im Allgemeinen nicht erfüllbar. Es muss eine neue Bedingung an den Projektor $\mathcal{Q}_1$ gestellt werden, die der Bedingung $N_0 \ominus (N_0 \cap N_1) \subseteq \ker \mathcal{Q}_1$ entspricht und eine Konstruktion des Projektors $\mathcal{Q}_1$ ermöglicht. Nachdem B_1 und $\mathcal{Q}_1$ berechnet wurden ist ein Test $G_1 = G_2$ (d. h. $B_1\mathcal{Q}_1 = 0$) möglich. Da auch der singuläre Traktabilitätsindex unabhängig von der speziellen Wahl der zulässigen Projektoren ist, kann ein beliebiges $\mathcal{Q}_1$ ausgewählt werden, welches die Bedingungen erfüllt, ohne dass der Traktabilitätsindex beeinflusst wird.

Bevor wir uns jedoch mit der Konstruktion der Matrixkette und dem Algorithmus selbst beschäftigen, werden zunächst wichtige Zusammenhänge von Projektoren, verallgemeinerten Inversen und der Singulärwertzerlegung (SVD - engl. Singular-Value Decomposition) aus der entsprechenden Literatur zitiert.

5.1 Theoretische Grundlagen

Zunächst stellen wir den Zusammenhang zwischen der Singulärwertzerlegung (SVD) einer Matrix und ihren reflexiven Inversen dar. Im Abschnitt A.3 sind weitere elementare Eigenschaften von verallgemeinerten reflexiven Inversen und Projektoren zu finden. Ihre Kenntnis ist für das Verständnis dieses Kapitels ebenso notwendig, wie die im 1. Kapitel eingeführte Theorie von Algebrodifferentialgleichungen.

Lemma 5.1 (Existenz der SVD). *[HH94] Es sei $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ mit* $\operatorname{rg} A =: r$*. Dann existieren unitäre Matrizen $U \in L(\mathbb{R}^n)$ und $V \in L(\mathbb{R}^m)$, sodass $U^T AV = \widehat{\Sigma} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$*

mit

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma} &= \begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\\ \Sigma &= \operatorname{diag}\left(\sigma_1,\ldots,\sigma_r\right),\\ \sigma_1 &\geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0.\end{aligned}$$

Dabei sind $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ gerade die von 0 verschiedenen singulären Werte. Σ ist dabei eindeutig bestimmt.

Die Zerlegung $A = U\Sigma V^T$ heißt Singulärwertzerlegung von A.

Wir konstruieren nun mit Hilfe dieser Zerlegung eine reflexive Inverse zu A. Dazu verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 5.2. *[Zie79] Es sei $A \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right)$ und $A = U\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^T,\ \Sigma = \operatorname{diag}\left(\sigma_1,\ldots,\sigma_r\right)$ die zugehörige Singulärwertzerlegung. Dann ist jede reflexive Inverse $A^- \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ von A wie folgt darstellbar*

$$\begin{aligned}A^- &= V\begin{pmatrix}\Sigma^{-1} & M_2\\ M_1 & M_1\Sigma M_2\end{pmatrix}U^T\\ &= V\begin{pmatrix}\Sigma^{-1}\\ M_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & \Sigma M_2\end{pmatrix}U^T.\end{aligned}$$

Dabei sind $M_1 \in L\left(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^{m-r}\right)$ und $M_2 \in L\left(\mathbb{R}^{n-r}, \mathbb{R}^r\right)$ frei wählbare Matrizen.

M_1 und M_2 werden durch die Projektoren $A^-A = \mathcal{P}$ und $AA^- = \mathcal{R}$ eindeutig bestimmt (vgl. Lemma A.6).

Für die folgenden Betrachtungen werden die Bezeichnungen der einzelnen Elemente der Matrixkette, die in Abschnitt 1.2 eingeführt wurden, verwendet.

5.2 Anfang der Matrixkette und propere Formulierung

Um die Matrizen A_0, D_0, G_0 und den Projektor $\mathcal{Q}_0$ zu bestimmen, wird der Algorithmus von R. Lamour nahezu unverändert übernommen. Lediglich durch die veränderten Dimensionen der Koeffizienten A_0 und D_0 wurden einige Anpassungen notwendig. Wir folgen zunächst den Ausführungen in [Lam01] und erhalten

$$\begin{aligned}A_0 &= U_{A_0}\begin{pmatrix}\Sigma_{A_0} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V_{A_0}^T \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right),\\ A_0^- &= V_{A_0}\begin{pmatrix}\Sigma_{A_0}^{-1} & M_{A_02}\\ M_{A_01} & M_{A_01}\Sigma_{A_0}M_{A_01}\end{pmatrix}U_{A_0}^T,\\ D_0 &= U_{D_0}\begin{pmatrix}\Sigma_{D_0} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V_{D_0}^T \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right),\\ D_0^- &= V_{D_0}\begin{pmatrix}\Sigma_{D_0}^{-1} & M_{D_02}\\ M_{D_01} & M_{D_01}\Sigma_{D_0}M_{D_01}\end{pmatrix}U_{D_0}^T.\end{aligned}$$

Es sei $\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix} = H := V_{A_0}^T U_{D_0}$ und $Z := \Sigma_{A_0} H_1 \Sigma_{D_0}$, $Z = U_Z \Sigma_{G_0} V_Z^T$ die zugehörige SVD. Dann ist

$$\begin{aligned} G_0 &= A_0 D_0 \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k\right) \\ &= U_{A_0} \begin{pmatrix} \Sigma_{A_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_{A_0}^T U_{D_0} \begin{pmatrix} \Sigma_{D_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_{D_0}^T \\ &= U_{G_0} \begin{pmatrix} \Sigma_{G_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_{G_0}^T \end{aligned}$$

und die SVD von G_0 lässt sich mit Hilfe der Singulärwertzerlegungen von A_0, D_0 und Z schreiben. Es ist

$$U_{G_0} = U_{A_0} \begin{pmatrix} U_Z & \\ & I \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V_{G_0}^T = \begin{pmatrix} V_Z^T & \\ & I \end{pmatrix} V_D^T.$$

Jetzt muss der Hauptterm auf propere Formulierung überprüft werden. Dies geschieht wie im regulären Fall. Dabei können die freien Parameter $M_{D_0 2}$ und $M_{A_0 1}$ für A_0 und D_0 bestimmt werden [Lam01].

$$\begin{aligned} M_{D_0 2} &= \Sigma_{D_0}^{-1} H_1^{-1} H_2, \\ M_{A_0 1} &= H_3 H_1^{-1} \Sigma_{A_0}^{-1}. \end{aligned}$$

Auch die Bestimmung von $\mathcal{Q}_0$ erfolgt analog zum regulären Fall. Dabei erhalten wir für $M_{D_0 1}$ eine Bedingung in Abhängigkeit von $M_{G_0 1}$. Es ist $D_0^- D_0 = I - \mathcal{Q}_0$ und damit

$$\begin{aligned} I - \mathcal{Q}_0 =& V_{D_0} \begin{pmatrix} I & 0 \\ M_{G_0 1} U_Z^T Z & 0 \end{pmatrix} V_{D_0} \in L\left(\mathbb{R}^m\right), \\ M_{D_0 1} =& M_{G_0 1} U_Z^T \Sigma_{A_0} H_1. \end{aligned}$$

Dann folgt [Lam01] (vgl. auch Lemma A.5)

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0 &= I - G_0^- G_0 \\ &= V_{G_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M_{G_0 1} \Sigma_{G_0} & I \end{pmatrix} V_{G_0}^T. \end{aligned}$$

5.3 Der nächste Schritt in der Matrixkette

Für die Überprüfung des singulären Traktabilitätsindexes 1 und damit der Konstruktion von $\mathcal{Q}_1$ und B_1 muss die Bedingung $N_0 \ominus (N_0 \cap N_1) \subseteq \ker \mathcal{Q}_1$ sichergestellt werden. Nach [Lam01] lässt sich jeder Projektor auf $\ker G_1$ als

$$\mathcal{Q}_1 = V_{G_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M_{G_1 1} S_1 & I \end{pmatrix} V_{G_1}^T \tag{5.2}$$

darstellen. Dabei ist $M_{G_1 1} \in L\left(\mathbb{R}^{r_1}, \mathbb{R}^{m-r_1}\right)$ beliebig wählbar. Der folgende Satz liefert eine Bedingung, die $N_0 \ominus (N_0 \cap N_1) \subseteq \ker \mathcal{Q}_1$ entspricht.

Satz 5.3. *Es sei* $G_0, G_1 \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k\right)$, $\mathcal{Q}_0$ *Projektor auf* $\ker G_0 = N_0$, $\mathcal{Q}_1$ *Projektor auf* $\ker G_1 = N_1$. *Dann ist* $\mathcal{Q}_1$ *ein Projektor auf* $\ker G_1$, *der die Bedingung* $N_0 \ominus (N_0 \cap N_1) \subseteq \ker \mathcal{Q}_1$ *genau dann erfüllt, wenn*

$$\mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0 \tag{5.3}$$

erfüllt ist.

Die Bedingung (5.3) ist mit der Bedingung $\mathcal{P}_0 \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0 = 0$ äquivalent.

Beweis. ($\longrightarrow$) $\mathcal{Q}_1$ sei ein Projektor auf $\ker G_1$, der die Bedingung $N_0 \ominus (N_0 \cap N_1) \subseteq \ker \mathcal{Q}_1$ erfüllt. Das bedeutet $\exists X_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ mit

$$\begin{cases} X_1 \oplus (N_0 \cap N_1) = N_0, \\ X_1 \subseteq \ker \mathcal{Q}_1, \\ X_1 \subseteq N_0 = \operatorname{im} \mathcal{Q}_0. \end{cases}$$

Weiterhin gilt $N_0 = \operatorname{im} \mathcal{Q}_0 = \ker \mathcal{P}_0$ und aufgrund der Assoziativität von $\oplus$ folgt daher

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &= N_0 \oplus \operatorname{im} \mathcal{P}_0 \\ &= ((N_0 \cap N_1) \oplus X_1) \oplus \operatorname{im} \mathcal{P}_0 \\ &= (N_0 \cap N_1) \oplus (X_1 \oplus \operatorname{im} \mathcal{P}_0). \end{aligned}$$

Dann existiert ein Projektor $\mathcal{Q}_{01}$, der die Zerlegung wie folgt realisiert

$$\begin{aligned} \ker \mathcal{Q}_{01} &= X_1 \oplus \operatorname{im} \mathcal{P}_0, \\ \operatorname{im} \mathcal{Q}_{01} &= N_0 \cap N_1 = \ker \begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gelten nun folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_{01} &= \mathcal{Q}_{01}, \ \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_{01} = \mathcal{Q}_{01}, \\ \operatorname{im} \mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}) &= X_1 \subseteq \ker \mathcal{Q}_1 \subseteq \mathbb{R}^m \\ \to \qquad 0 &= \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}) = \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0 - \mathcal{Q}_{01} \\ \to \qquad \mathcal{Q}_{01} &= \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0. \end{aligned}$$

Mit $\mathcal{Q}_{01} = \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0$ folgt $\mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_{01} = \mathcal{Q}_{01} = \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0$ (5.3).

($\longleftarrow$) Es sei $\mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0$. Mit $\mathcal{Q}_{01} := \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0$ ist $\mathcal{Q}_{01}$ Projektor, denn

$$\mathcal{Q}_{01}^2 = \mathcal{Q}_1 (\mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0) = \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_{01}.$$

Wir legen $X_1 := \operatorname{im} \mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0)$ fest. Nacheinander wird nun gezeigt, dass damit die Bedingung $X_1 \subseteq \ker \mathcal{Q}_1 : X_1 \oplus (N_0 \cap N_1) = N_0$ erfüllt ist.

- Zeige zunächst, dass $X_1 \subseteq \ker \mathcal{Q}_1$ gilt.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}) &= \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0 - \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_{01} \\ &= \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0 - \mathcal{Q}_{01}^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Nun wird $X_1 \cap (N_0 \cap N_1) = \{0\}$ nachgewiesen.
  - $x \in N_0 \cap N_1 \;\leftrightarrow\; \mathcal{Q}_1 x = x$ und $\mathcal{Q}_0 x = x$.
  - $\mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01})$ ist ein Projektor, denn es gilt

$$\begin{aligned}(\mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}))^2 &= \mathcal{Q}_0 - 2\mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_{01} + \mathcal{Q}_{01}\\ &= \mathcal{Q}_0 - 2\mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_{01} + \mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_{01}\\ &= \mathcal{Q}_0 - \mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_{01}\\ &= \mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}).\end{aligned}$$

  Daher folgt

  - für alle $x \in X_1 = \operatorname{im} \mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}) : \mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}) x = x$.
  - für alle $x \in N_0 \cap N_1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}) x &= \mathcal{Q}_0 x - \mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_0 x\\ &= x - x = 0\\ \rightarrow x &\in \ker \mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}).\end{aligned}$$

  $\rightarrow X_1 \cap (N_0 \cap N_1) = \{0\}$.

- Schließlich ist noch zu zeigen, dass $\forall x \in N_0 : \exists w_1 \in (N_0 \cap N_1), \exists w_2 \in \operatorname{im} \mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}) :$ $x = w_1 + w_2$ gilt. Es sei $x \in N_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}x = \mathcal{Q}_0 x &= \mathcal{Q}_0 (\mathcal{Q}_{01} + I - \mathcal{Q}_{01}) x\\ &= \mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_{01} x + \mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}) x\\ &= \mathcal{Q}_{01} x + \mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}) x.\end{aligned}$$

  Mit $w_1 := \mathcal{Q}_{01} x \in N_0 \cap N_1$ und $w_2 := \mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}) x \in \operatorname{im} \mathcal{Q}_0 (I - \mathcal{Q}_{01}) = X_1$ folgt $x = w_1 + w_2$.

□

Für DAEs mit $N_0 \cap N_1 = \{0\}$, gilt wegen $\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_0 = 0$ auch $\mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_0$. Auch für reguläre DAEs lässt sich somit die Bedingung (5.3) nutzen um $\mathcal{Q}_1$ zu konstruieren.

Nun berechnen wir $\mathcal{Q}_1$ mit Hilfe der Bedingung (5.3). $\mathcal{Q}_0$ und $G_1 = U_{G_1} \begin{pmatrix} \Sigma_{G_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_{G_1}^T$ wurden bereits berechnet. Es muss nur noch $M_{G_1 1} \in L(\mathbb{R}^{r_1}, \mathbb{R}^{m-r_1})$ ermittelt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_0\\ \leftrightarrow\quad & \mathcal{Q}_0 \left(I - V_{G_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M_{G_1 1} S_1 & I \end{pmatrix} V_{G_1}^T\right) \mathcal{Q}_0 = \left(I - V_{G_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M_{G_1 1} S_1 & I \end{pmatrix} V_{G_1}^T\right) \mathcal{Q}_0\\ \leftrightarrow\quad & \mathcal{Q}_0 - \mathcal{Q}_0 V_{G_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M_{G_1 1} S_1 & I \end{pmatrix} V_{G_1}^T \mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_0 - V_{G_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M_{G_1 1} S_1 & I \end{pmatrix} V_{G_1}^T \mathcal{Q}_0\\ \leftrightarrow\quad & \mathcal{Q}_0 V_{G_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M_{G_1 1} S_1 & I \end{pmatrix} V_{G_1}^T \mathcal{Q}_0 = V_{G_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M_{G_1 1} S_1 & I \end{pmatrix} V_{G_1}^T \mathcal{Q}_0\\ \leftrightarrow\quad & (\mathcal{Q}_0^T V_{G_1} \otimes \mathcal{Q}_0 V_{G_1}) \operatorname{vec} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M_{G_1 1} S_1 & I \end{pmatrix} = (\mathcal{Q}_0^T V_{G_1} \otimes V_{G_1}) \operatorname{vec} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M_{G_1 1} S_1 & I \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leftrightarrow \quad & \left(\left(\mathcal{Q}_0^T V_{G_1} \otimes \mathcal{Q}_0 V_{G_1}\right) - \left(\mathcal{Q}_0^T V_{G_1} \otimes V_{G_1}\right)\right) \operatorname{vec} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M_{G_11} S_1 & I \end{pmatrix} = 0 \\
\leftrightarrow \quad & \left(\mathcal{Q}_0^T V_{G_1} \otimes \left(\mathcal{Q}_0 V_{G_1} - V_{G_1}\right)\right) \operatorname{vec} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M_{G_11} S_1 & I \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$E := \mathcal{Q}_0^T V_{G_1} \otimes \left(\mathcal{Q}_0 V_{G_1} - V_{G_1}\right) \in L\left(\mathbb{R}^{m^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\leftrightarrow \exists G \in L\left(\mathbb{R}^{r_1(m-r_1)}, \mathbb{R}^{m^2}\right), \exists H \in L\left(\mathbb{R}^{(m-r_1)^2}, \mathbb{R}^{m^2}\right) : & \\
& \begin{pmatrix} G & H \end{pmatrix} \operatorname{vec} \begin{pmatrix} -M_{G_11} S_1 & I_{m-r_1} \end{pmatrix} = 0 \\
\leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\operatorname{vec}\left(M_{G_11} S_1\right) \\ \operatorname{vec}\left(I_{m-r_1}\right) \end{pmatrix} = 0 \\
\leftrightarrow \quad & G \operatorname{vec}\left(-M_{G_11} S_1\right) = -H \operatorname{vec} I \\
\leftrightarrow \quad & G\left(-S_1^T \otimes I\right) \operatorname{vec} M_{G_11} = -H \operatorname{vec} I
\end{aligned}$$

$$F := G\left(-S_1 \otimes I\right) \in L\left(\mathbb{R}^{r_1(m-r_1)}, \mathbb{R}^{m^2}\right)$$

$$\leftrightarrow \quad F \operatorname{vec} M_{G_11} = -H \operatorname{vec} I.$$

Die Koeffizientenmatrix G wird dabei direkt aus ausgewählten Spalten von E gebildet. Jede Lösung des linearen Gleichungssystems

$$F m_{G_11} = -H \operatorname{vec} I \text{ mit } m_{G_11} := \operatorname{vec} M_{G_11} \tag{5.4}$$

ermöglicht die Konstruktion eines zulässigen Projektors $\mathcal{Q}_1$. Im Allgemeinen ist $\ker F \neq \{0\}$ und daher $\mathcal{Q}_1$ nicht eindeutig bestimmt. Durch die Wahl einer Lösung von (5.4) wird ein $\mathcal{Q}_1$ mit (5.2) ausgewählt. Jetzt wird die Bedingung $G_1 = G_2 \, (= G_1 + B_1 \mathcal{Q}_1)$ bzw. $B_1 \mathcal{Q}_1 = 0$ überprüft.

Bei der Lösung des linearen Gleichungssystems wurde zunächst eine QR-Zerlegung von F berechnet. Dazu wurde die von MatLab zur Verfügung gestellte Funktion $[QF, RF, EF] = qr\,(F)$ verwendet. Dabei ist EF eine Permutationsmatrix, QF eine orthogonale Matrix und RF eine rechte obere Dreiecksmatrix mit fallenden Elementen auf der Hauptdiagonale (vgl. dazu die Dokumentation von MatLab). Diese spezielle QR-Zerlegung ermöglicht es nun ein eindeutig lösbares Teilsystem auszuwählen. Die übrigen, frei wählbaren Parameter, werden vorher beliebig festgelegt. In diesem Fall werden sie - der Einfachheit halber - Null gesetzt.

Mit Hilfe der hergeleiteten Konstruktion eines Projektors $\mathcal{Q}_1$ ist es gelungen ein Programm zu implementieren, welches erstmals Algebrodifferentialgleichungen auf singulären und regulären Traktabilitätsindex $\mu = 0$ und 1 testet. Die neu entwickelten bzw. veränderten Quelltexte sind im Anhang B abgedruckt. Alle anderen benötigten Unterprogramme können unverändert auch für den neuen Indextester verwendet werden.

Es ist zu beachten, dass die Dimensionsbezeichnungen im Programmcode - um die Kompatibilität zu den Programmen von [Lam01] zu wahren - nicht mit denen übereinstimmen, die hier in der Arbeit verwendet wurden.

5.4 Demonstration des Indextesters anhand eines Beispiels

Der hier vorgestellte Indextester ist als MatLab Anwendung programmiert. Implementiert und getestet wurde es mit MatLab 6.5 auf einem Linux System. Mit dieser Diplomarbeit wird ein Datenträger geliefert. Dort befinden sich das gepackte *tar*-Archiv *DA_doering.tar.bz2*. Die Integrität des Archivs kann unter Linux mit Hilfe von

```
md5sum -c DA_doering.tar.bz2.md5
```

überprüft werden. Mit dem Befehl

```
tar -xvjpf DA_doering.tar.bz2
```

wird das Archiv entpackt. Ein Verzeichnis *DA_doering* wird angelegt. In diesem Verzeichnis befinden sich neben dieser Arbeit im *ps*-Format alle notwendigen Dateien um den Indextester anzuwenden.

Im Verzeichnis *singulaer* finden sich alle im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Unterprogramme. Verschiedene Beispiele (u. a. das unten Vorgestellte) und die Vorlagen, für das Testen eigener Algebrodifferentialgleichungen auf singulären oder regulären Traktabilitätsindex 0 oder 1, befinden sich im Unterverzeichnis *beispiele*. Zusätzlich werden einige Unterprogramme benötigt, die im Rahmen des regulären Indextesters (vgl. [Lam01]) entstanden sind. Diese befinden sich im Verzeichnis *regulaer*.

Für das Testen einer DAE auf regulären bzw. singulären Traktabilitätsindex 0 oder 1 müssen zwei Dateien bearbeitet werden. In diesen wird die DAE selbst und einige Parameter übergeben. Wir demonstrieren die Arbeitsweise an einem Beispiel. Die DAE

$$\begin{array}{lcll} x_1' & + & x_4 & = q_1 \\ x_2' & + & 3x_1 & = q_2 \\ x_3' & & & = q_3 \\ x_4' & & & = q_4 \\ x_5' & + & x_6' & = q_5 \\ x_6' & & & = q_6 \\ x_2' & + & x_7 & = q_7 \\ & & x_6 + x_8 + x_9 & = q_8 \end{array} \tag{5.5}$$

erhält die Form (1.1) in properer Formulierung mit

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_x = \begin{pmatrix} x_4 \\ 3x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_7 \\ x_6 + x_7 + x_8 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$
G_0 = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
& 1 & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & \\
& & & 1 & & & & & \\
& & & & 1 & 1 & & & \\
& & & & & 1 & & & \\
& & 1 & & & & & & \\
& & & & & & & &
\end{pmatrix}, \qquad
B_0 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix},
$$

$$
\mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} 0_{6\times 6} & 0_{6\times 3} \\ 0_{3\times 6} & I_3 \end{pmatrix}, \qquad
N_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^9 \mid x_1 = \cdots = x_6 = 0 \right\},
$$

$$
G_1 = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
& 1 & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & \\
& & & 1 & & & & & \\
& & & & 1 & 1 & & & \\
& & & & & 1 & & & \\
& & 1 & & & & 1 & & \\
& & & & & & & 1 & 1
\end{pmatrix}, \qquad
\mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix}
0 & & & & & & & & \\
& 0 & & & & & & & \\
& & 0 & & & & & & \\
& & & 0 & & & & & \\
& & & & 0 & & & & \\
& & & & & 0 & & & \\
& & & & & & 0 & & \\
& & & & & & & 1 & \\
& & & & & & & -1 &
\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^9 \mid x_1 = \cdots = x_7 = 0,\ x_8 + x_9 = 0 \right\}, \\
N_0 \cap N_1 &= N_1, \\
B_1 = B_0 \mathcal{P}_0 &= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}. \\
&\to B_1 \mathcal{Q}_1 = 0, G_2 = G_1.
\end{aligned}
$$

Dieses System ist singulär mit Traktabilitätsindex 1.

Nachdem wir den Traktabilitätsindex von Hand berechnet haben, wollen wir nun das Programm benutzten. In der Datei *main_ dae.m* werden die Startwerte für x, z und t festgelegt. Im Funktionsaufruf muss der Name der Datei angegeben werden, die die Angaben für die DAE enthält.

```
%%
%%
%%  Hella Döring
%%  Last Update: 14.10.2004
%%
%%  Beispieldatei zur Übergabe der Startwerte für t,x,z sowie eigener
%%  Parameter zum Testen der DAE
```

```
%%

        %% Legen Sie hier die Startwerte für t, x, z fest
        % Startwert für t
% t=0
t=0;

        % Startwerte für x, je nach Dimension der Aufgabe
% x=[0;0.5]
x=[0.1;0.2;0.3;0.1;0.2;0.3;0.5;0.7;1];

        % Startwerte für z, je nach Dimension der Aufgabe
% z=[0.1;0.5]
z=[0;0.1;0.2;0.3;0.7;1;0.5;0.1;0.5];

xfunction='xintpol'
        % Hier müssen sie 'dae' ersetzten durch den Namen der Datei, in
        % der das Beispiel definiert ist.
[index, reg]=main_index_sing('doering_demo1',t,xfunction,3,t,x,z);
```

Quelltext 5.1: Testbeispiel main_doering_demo1.m

Für die folgende Datei *doering_ demo1.m* wurde die Datei *dae.m* als Grundlage verwendet. Sie enthält die Angaben, die die DAE beschreibt.

```
%%
%%
%%  Hella Döring
%%  Last Update: 14.10.2004
%%
%%  Beispieldatei zur Übergabe der DAE an die Datei main_dae.m
%%
%%  f((d(x,t))',x,t)=f(z,x,t)
%%  n - Anzahl der Gleichungen
%%
%%
function varargout = doering_demo1(z,x,t,flag,varargin)
  % DAE file of structure f((d(x,t))',x,t)=f(z,x,t)

  % Parameters:
  if isempty(flag)
    varargout{1} = f(z,x,t,varargin{:});
  else
    switch flag
     case ''
      varargout{1} =  f(z,x,t);
     case 'dfy'
      varargout{1} = dfy(z,x,t);
     case 'dfx'
      varargout{1} = dfx(z,x,t);
     case 'dft'
      varargout{1} = dft(z,x,t);
     case 'd'
      varargout{1} = d(x,t);
     case 'dx'
      varargout{1} = dx(x,t);
     otherwise
      error(['Unknown flag ''' flag '''.']);
```

```
    end
  end

        %% Gleichungen , die die DAE beschreiben
function [fzxt]=f(z,x,t);
fzxt=zeros(8,1);
        %% Ersetzen Sie hier fzxt(i) durch die jeweilige Gleichung,
        %% i=1,...,n
        %% fzxt(1)=...
        %% ...
        %% fzxt(n)=...
fzxt(1)=z(1)+x(4);
fzxt(2)=z(2)+3*x(1);
fzxt(3)=z(3);
fzxt(4)=z(4);
fzxt(5)=z(5)+z(6);
fzxt(6)=z(6);
fzxt(7)=z(2)+x(7);
fzxt(8)=x(6)+x(8)+x(9);

        %% Partielle Ableitung von f nach y
function [dfyzxt]=dfy(z,x,t);
dfyzxt=zeros(8,6);
        %% Weisen Sie hier die Werte für dfyzxt(i,j) zu,
        %% i=1,...,n und j=1,...,size(z)
        %% dfyzxt(i,j)=...
dfyzxt(1,1)=1;
dfyzxt(2,2)=1;
dfyzxt(3,3)=1;
dfyzxt(4,4)=1;
dfyzxt(5,5)=1;
dfyzxt(5,6)=1;
dfyzxt(6,6)=1;
dfyzxt(7,2)=1;
error(' daefile: not yet realized');

        %% Partielle Ableitung von f nach x
function [dfxzxt]=dfx(z,x,t);
dfxzxt=zeros(8,9);
        %% Weisen Sie hier dfyzxt(i,j) die entsprechenden Werte zu,
        %% i=1,...,n und j=1,...,size(x)
        %% dfyzxt(i,j)=...
dfxzxt(1,4)=1;
dfxzxt(2,1)=3;
dfxzxt(7,7)=1;
dfxzxt(8,6)=1;
dfxzxt(8,8)=1;
dfxzxt(8,9)=1;
error(' daefile: not yet realized');

        %% Partielle Ableitung von f nach t
function [dftzxt]=dft(z,x,t);
dftzxt=zeros(8,1);
        %% Weisen Sie hier dftzxt(i,1) die entsprechenden Werte zu,
        %% i=1,...,n
        %% dft(i)=...
error(' daefile: not yet realized');
```

```
        %% Angaben zu d(x,t)
function [dxt]=d(x,t);
        %% Die jeweiligen Werte für dxt(i,1) werden hier festgelegt,
        %% i=1,...,size(z)
        %% dxt(1)=...
        %% ...
        %% dxt(size(z))=...
dxt=x(1:6);

        %% Partielle Ableitung von d nach t
function [dxxt]=dx(x,t);
dxxt=zeros(6,6);
        %% Weisen Sie hier dxxt(i,j) die entsprechenden Werte zu
        %% i,j=1,...,size(z)
dxxt(1,1)=1;
dxxt(2,2)=1;
dxxt(3,3)=1;
dxxt(4,4)=1;
dxxt(5,5)=1;
dxxt(6,6)=1;
error('daefile: not yet realized');
```

Quelltext 5.2: Testbeispiel doering_demo1.m

In MatLab wird die Indexbestimmung des Testbeispiels mit dem Aufruf

`main_doering_demo1`

gestartet. Anschließend können die Ergebnisse mit Hilfe der Logdatei ausgewertet werden. Für das obige Beispiel erhalten wir eine Logdatei mit dem folgenden Inhalt.

```
doering_demo1_14-Oct-2004_15:29:29
rank_of_Sigma: smallest singular value is 0.61803 > max(size(Sigma))*norm*
    threshold (= 1.2944e-08)
rank_of_Sigma: smallest singular value is 1 > max(size(Sigma))*norm*threshold
     (= 9e-09)
rank_of_Sigma: smallest singular value is 0.61803 > max(size(Sigma))*norm*
    threshold (= 9.7082e-09)

 A (computed numerically)

1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00   1.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00
0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00

 D (computed numerically)

1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
      0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
      0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
      0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
```

```
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00

 B (computed numerically)

0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
3.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00
       0.0000e+00   1.0000e+00   1.0000e+00

Rank of 0th level (G0):6

  Q0 =

0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   4.4409e-16   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   4.4409e-16
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00

 Norm von B0*Q0= 1.000000e+00
N0 geschnitten N1 ist nicht 0

 G1=

1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
       0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   1.0000e-00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
```

```
        0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
        0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
        0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00   1.0000e+00
        0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   -5.5511e-17   1.0000e+00
        0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
        1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
        0.0000e+00   1.0000e+00   1.0000e+00
rank_of_Sigma: smallest singular value is 0.61803 > max(size(Sigma))*norm*
    threshold (= 1.4562e-08)
rank_of_Sigma: smallest singular value is 0.61803 > max(size(Sigma))*norm*
    threshold (= 1.2944e-08)
rank_of_Sigma: smallest singular value is 0.61803 > max(size(Sigma))*norm*
    threshold (= 1.2944e-08)
rank_of_Sigma: smallest singular value is 1 > max(size(Sigma))*norm*threshold
     (= 9e-09)
rank_of_Sigma: smallest singular value is 0.61803 > max(size(Sigma))*norm*
    threshold (= 9.7082e-09)
rank_of_Sigma: smallest singular value is 0.61803 > max(size(Sigma))*norm*
    threshold (= 1.4562e-08)
rank_of_Sigma: smallest singular value is 0.61803 > max(size(Sigma))*norm*
    threshold (= 1.2944e-08)
rank_of_Sigma: smallest singular value is 0.61803 > max(size(Sigma))*norm*
    threshold (= 1.2944e-08)
rank_of_Sigma: smallest singular value is 1 > max(size(Sigma))*norm*threshold
     (= 9e-09)
rank_of_Sigma: smallest singular value is 0.61803 > max(size(Sigma))*norm*
    threshold (= 9.7082e-09)
rank_of_Sigma: smallest singular value is 0.61803 > max(size(Sigma))*norm*
    threshold (= 1.4562e-08)
rank_of_Sigma: smallest singular value is 0.61803 > max(size(Sigma))*norm*
    threshold (= 1.2944e-08)

norm (DP0...PlD-)' = 0, l = 1


 B_1

0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   1.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
        0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
3.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
        0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
        0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
        0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
        0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
        0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
        0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00
```

```
0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    1.0000e+00
      0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00

 Norm von B1*Q1= 0.000000e+00

 B1*Q1

0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
      0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
      0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
      0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
      0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
      0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
      0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
      0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00
      0.0000e+00    0.0000e+00    0.0000e+00

 Traktabilitätsindex der DAE: singulärer Index 1
```

Quelltext 5.3: Testbeispiel Logdatei

6 Thesen

So eine Arbeit wird eigentlich nie fertig, man muß sie für fertig erklären, wenn man nach Zeit und Umständen das möglichste getan hat.
J. W. v. Goethe, Italienische Reise, 16.03.1787

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden die Eigenschaften und der Traktabilitätsindex von matrixwertigen Algebrodifferentialgleichungen vom Riccati-Typ untersucht. Die Ergebnisse werden in den folgenden Thesen zusammenfassend dargestellt.

1. Bei der Riccati-Transformation von Optimalsteuerungsproblemen mit gesteuerten DAEs entstehen nichtlineare, matrixwertige DAEs vom Riccati-Typ, die im Allgemeinen nicht regulär sind. Das bestehende Konzept des Traktabilitätsindexes kann deshalb auf derartige Gleichungen nicht angewendet werden.

2. Dieses Konzept kann jedoch so ergänzt werden, dass auch spezielle quasilineare, singuläre DAEs - zu denen die Riccati-transformierten DAEs gehören - charakterisiert werden können.

   - Die Definition der properen Formulierung wird direkt auf spezielle quasilineare, singuläre DAEs übertragen.
   - Mit einer Erweiterung des Traktabilitätsindexes wird der neuen Situation Rechnung getragen. Die bereits bekannten Definitionen des Traktabilitätsindexes sind jeweils Spezialfälle der neuen Definition und fügen sich somit harmonisch in die Erweiterung ein.
   - Für DAEs mit singulärem (bzw. regulärem) Traktabilitätsindex 1 gilt: Alle Linearisierungen längs einer stetig differenzierbaren Funktion haben ebenfalls singulären (bzw. regulären) Traktabilitätsindex 1 (vgl. Satz 1.10).
   - Reguläre DAEs mit Traktabilitätsindex 1 sind eindeutig lösbar (vgl. Satz 1.12). Exemplarisch wird gezeigt, dass solche Lösbarkeitsaussagen für singuläre DAEs im Allgemeinen nicht möglich sind.
   - Der Traktabilitätsindex der hier untersuchten Beispiele bleibt durch Entfernen (bzw. Hinzufügen) von einer Gleichung entweder unverändert oder erhöht (bzw. verringert) sich um 1.

   Damit wird die Basis für die Anwendung der neuen Charakterisierung von regulären und singulären DAEs geschaffen.

3. Jede MR-DAE ist unter der Bedingung $\ker A = \{0\}$ genau dann proper formuliert, wenn dies die zugrundeliegende gesteuerte DAE auch war.

4. Für den Spezialfall eines Optimalsteuerungsproblems mit einer gesteuerten, regulären gewöhnlichen Differentialgleichung, führt das Lösen des Problems über eine Optimalitäts-

DAE mit regulärem Traktabilitätsindex 1 zu einer MR-DAE mit regulärem Traktabilitätsindex 0. Es entsteht eine matrixwertige, reguläre gewöhnliche Differentialgleichung vom Riccati-Typ.

5. Für MR-DAEs, die bei der Riccati-Transformation von Optimalsteuerungsaufgaben mit gesteuerten, semi-expliziten DAEs entstehen, gelten folgende Eigenschaften.

   - Die Konsistenzbedingung $W_{22} = 0$ ist für die Lösbarkeit der MR-DAE notwendig.
   - Falls $\ker C_{22}^T = \{0\}$ ist, so entsteht aus einer Optimalitäts-DAE mit regulärem Traktabilitätsindex 1 eine singuläre MR-DAE mit Traktabilitätsindex 1.

     Es lässt sich ein Teilsystem der MR-DAE angeben, welches regulär mit Traktabilitätsindex 1 ist und unter der Bedingung $W_{22} = 0$ denselben Lösungsraum hat wie die MR-DAE.
   - Im Fall $\ker C_{22} \neq \{0\}$ hat die zugehörige MR-DAE im Allgemeinen weder regulären noch singulären Traktabilitätsindex 1. Falls zusätzlich $m = k$ ist, ist jede MR-DAE, die aus einer Optimalitäts-DAE mit regulärem Traktabilitätsindex 1 entsteht, nicht lösbar.

6. Das hier implementierte Programm prüft, ob eine proper formulierte DAE singulären oder regulären Traktabilitätsindex $\mu = 0$ oder 1 hat. Falls ein Projektor $\mathcal{Q}_1$ existiert, der die Bedingung $N_0 \ominus (N_0 \cap N_1) \subseteq \ker \mathcal{Q}_1$ für singulären Traktabilitätsindex $\mu \geq 1$ sicherstellt, kann ein solcher explizit berechnet werden.

7. Für MR-DAEs aus allgemeinen Steuerungsaufgaben können redundante Gleichungen entfernt werden. Weitere Analysen können die hier vorgestellten Bedingungen, die regulären Traktabilitätsindex 1 der extrahierten DAE sichern, noch verfeinern.

A Grundlagen aus der linearen Algebra

In diesem Abschnitt werden wichtige Definitionen und Resultate vorgestellt, die für das Verständnis der Arbeit notwendig sind.

A.1 Direkte Summe und Differenz von Unterräumen

Definition A.1. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^m$ lineare Unterräume des $\mathbb{R}^m$.

- Dann bezeichnet

$$\begin{aligned}\mathcal{A} + \mathcal{B} :&= \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \{(a+b) \in \mathbb{R}^m \mid a \in \mathcal{A}\} \\ &= \{(a+b) \in \mathbb{R}^m \mid a \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B}\}\end{aligned}$$

  die *Summe* der Unterräume $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Für ein $x \in \mathcal{A} + \mathcal{B}$ ist die Zerlegung $x = a + b$ mit $a \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B}$ im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

- Falls $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$ ist, so bezeichnet

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} := \mathcal{A} + \mathcal{B}$$

  die *Direkte Summe* der Unterräume $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Für ein $x \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ ist die Zerlegung $x = a + b$ mit $a \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B}$ eindeutig bestimmt.

- Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^m$ lineare Unterräume. Wenn $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{X}$ gilt, dann schreiben wir auch

$$\mathcal{A} = \mathcal{X} \ominus \mathcal{B} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B} = \mathcal{X} \ominus \mathcal{A}.$$

A.2 Projektoren

Definition A.2. [MW01] $\mathcal{P} \in L(\mathbb{R}^m)$ heißt *Projektor*, falls $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.

In [MW01] wurden wichtige Eigenschaften von Projektoren zusammengestellt. Die folgenden werden in der vorliegenden Arbeit verwendet.

- Jeder Projektor $\mathcal{P} \in L(\mathbb{R}^m)$ zerlegt den $\mathbb{R}^m$ in Unterräume: $\mathbb{R}^m = \operatorname{im} \mathcal{P} \oplus \ker \mathcal{P}$. Es gilt also $\operatorname{im} \mathcal{P}^T = (\ker \mathcal{P})^{\perp}$.

- Zu jeder Zerlegung von $\mathbb{R}^m = \mathcal{M} \oplus \mathcal{L}$, $\mathcal{M},\ \mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^m$ Unterräume, gibt es einen eindeutig bestimmten Projektor $\mathcal{P}$ mit $\operatorname{im} \mathcal{P} = \mathcal{M}$ und $\ker \mathcal{P} = \mathcal{L}$. $\mathcal{P}$ heißt dann Projektor *auf $\mathcal{M}$ längs $\mathcal{L}$*.

- Falls $\mathcal{P}$ ein Projektor ist, dann ist auch $\mathcal{Q} := I - \mathcal{P}$ ein Projektor und heißt *komplementärer Projektor* zu $\mathcal{P}$.

- Falls $\mathcal{P}$ Projektor und $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T$, so wird $\mathcal{P}$ *Orthoprojektor* genannt. Es gilt dann $\operatorname{im} \mathcal{P} = \operatorname{im} \mathcal{P}^T = (\ker \mathcal{P})^\perp$.

Lemma A.3. *Seien $E, F \in L(\mathbb{R}^m)$, $N := \ker E$, $S := \{x \in \mathbb{R}^m \mid Fz \in \operatorname{im} E\}$, dann gilt*

$$N \cap S = \{0\} \quad \leftrightarrow \quad E + F\mathcal{Q} \text{ ist regulär für jeden Projektor } \mathcal{Q} \in L(\mathbb{R}^m) \text{ auf } N.$$

Beweis. [MW01]
($\longrightarrow$) Sei $N \cap S = \{0\}$.
Es sei $z \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $(E + F\mathcal{Q})\,z = 0$. Es folgt $E(-z) = F\mathcal{Q}z$ und daher ist $\mathcal{Q}z \in S$. Weiterhin ist $\mathcal{Q}z \in N$, also $\mathcal{Q}z \in N \cap S = \{0\}$.

$$\begin{aligned}
&\rightarrow & \mathcal{Q}z = 0,\ Ez = 0\\
&\rightarrow & z \in \ker E = N\\
&\rightarrow & z = \mathcal{Q}z = 0\\
&\rightarrow & E + F\mathcal{Q} \text{ ist regulär.}
\end{aligned}$$

($\longleftarrow$) Sei $E + F\mathcal{Q}$ regulär. Bezeichne $\mathcal{Q}_S := \mathcal{Q}\,(E + F\mathcal{Q})^{-1} F$. Zeige, dass $\mathcal{Q}_S$ Projektor auf N längs S ist. Daraus folgt dann direkt $N \cap S = \{0\}$.

1. $\mathcal{Q}_S$ ist Projektor, es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_S^2 &= \mathcal{Q}\,(E + F\mathcal{Q})^{-1} F\mathcal{Q}\,(E + F\mathcal{Q})^{-1} F\\
&= \mathcal{Q}\,(E + F\mathcal{Q})^{-1} (E + F\mathcal{Q})\,\mathcal{Q}\,(E + F\mathcal{Q})^{-1} F\\
&= \mathcal{Q}\mathcal{Q}\,(E + F\mathcal{Q})^{-1} F\\
&= \mathcal{Q}_S.
\end{aligned}$$

2. Zeige, dass $\operatorname{im} \mathcal{Q}_S = N$ gilt.
   a) $\operatorname{im} \mathcal{Q}_S \subseteq \operatorname{im} \mathcal{Q} = N$ folgt aus der Definition.
   b) Es gilt $N \subseteq \operatorname{im} \mathcal{Q}_S$, denn für $z \in N$ gilt

$$\begin{aligned}
z = \mathcal{Q}z \quad &= \mathcal{Q}^2 z\\
&= \mathcal{Q}\,(E + F\mathcal{Q})^{-1} (E + F\mathcal{Q})\,\mathcal{Q}z\\
&= \mathcal{Q}\,(E + F\mathcal{Q})^{-1} F\mathcal{Q}z\\
&= \mathcal{Q}_S\mathcal{Q}z \quad = \mathcal{Q}_S z.
\end{aligned}$$

3. Zeige nun, dass $\ker \mathcal{Q}_S = S$ gilt.
   a) Es ist $\ker \mathcal{Q}_S \subseteq S$, denn für $z \in \ker \mathcal{Q}_S$ gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{Q}\,(E + F\mathcal{Q})^{-1} Fz\\
&= (I - (I - \mathcal{Q}))\,(E + F\mathcal{Q})^{-1} Ez\\
\rightarrow \quad (E + F\mathcal{Q})^{-1} Fz &= (I - \mathcal{Q})\,(E + F\mathcal{Q})^{-1} Fz\\
Fz &= (E + F\mathcal{Q})\,(I - \mathcal{Q})\,(E + F\mathcal{Q})^{-1} Fz\\
&= E\,(E + F\mathcal{Q})^{-1} Fz \in \operatorname{im} E.
\end{aligned}$$

b) Es gilt $S \subseteq \ker \mathcal{Q}_S$, denn für $z \in S$ gilt $Fz \in \operatorname{im} E$.

$$\begin{aligned}
\rightarrow \qquad & \exists w: \ Fz = Ew \\
\rightarrow \qquad & \mathcal{Q}_S z = \mathcal{Q}\left(E + F\mathcal{Q}\right)^{-1} Ez \\
& = \mathcal{Q}\left(E + F\mathcal{Q}\right)^{-1} Ew \\
& = \mathcal{Q}\left(E + F\mathcal{Q}\right)^{-1} \left(E + F\mathcal{Q}\right)\left(I - \mathcal{Q}\right) w \\
& = \mathcal{Q}\left(I - \mathcal{Q}\right) w = 0.
\end{aligned}$$

□

A.3 Verallgemeinerte Inversen

Es sei $A \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right)$ und $X \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$. Mit Hilfe der *Penrose-Gleichungen*

$$AXA = A, \tag{A.1}$$
$$XAX = X, \tag{A.2}$$
$$(AX)^T = AX, \tag{A.3}$$
$$(XA)^T = XA \tag{A.4}$$

werden im Folgenden verschiedene *verallgemeinerte Matrixinversen* definiert.

Definition A.4. [BO71] Sei $A \in L\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right)$, $X \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$.

1. Eine *verallgemeinerte Inverse* der Matrix A, ist eine Matrix $X = A^g$, die die Bedingung (A.1) erfüllt.

2. Eine *reflexive Inverse* der Matrix A, ist eine Matrix $X = A^-$, die die Bedingungen (A.1) und (A.2) erfüllt.

3. Eine *Moore-Penrose-Inverse (oder Pseudo-Inverse)* der Matrix A, ist eine Matrix $X = A^+$, die die Penrose-Gleichungen (A.1) bis (A.4) erfüllt.

Die Bezeichnungen der verschiedenen verallgemeinerten Inversen sind in der Literatur nicht eindeutig. Insbesondere A^- wird oft für verallgemeinerte Inversen benutzt und nicht, wie hier, für (verallgemeinerte) reflexive Inversen. Weitere verallgemeinerte Inversen und Eigenschaften findet man zum Beispiel in [BO71] und [Zie79].

Lemma A.5. *Sei A^- eine reflexive Inverse von A . Dann sind AA^-, A^-A, $(I - AA^-)$ und $(I - A^-A)$ Projektoren und es gilt*

$$\operatorname{im} A^-A = \operatorname{im} A^-, \qquad \ker A^-A = \ker A, \tag{A.5}$$
$$\ker\left(I - A^-A\right) = \operatorname{im} A^-, \qquad \operatorname{im}\left(I - A^-A\right) = \ker A, \tag{A.6}$$
$$\operatorname{im} AA^- = \operatorname{im} A, \qquad \ker AA^- = \ker A^-, \tag{A.7}$$
$$\ker\left(I - AA^-\right) = \operatorname{im} A, \qquad \operatorname{im}\left(I - AA^-\right) = \ker A^-. \tag{A.8}$$

Beweis. Sei $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ und $A^- \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ eine reflexive verallgemeinerte Inverse von A. Dann ist

$$\left(AA^-\right)^2 = AA^-AA^- \overset{(A.1)}{=} AA^-,$$
$$\left(A^-A\right)^2 = A^-AA^-A \overset{(A.1)}{=} A^-A.$$

$(I - AA^-)$ und $(I - A^-A)$ sind die jeweils komplementären Projektoren.

- (A.5)

$$\begin{aligned} \operatorname{im} A^-A &\subseteq \operatorname{im} A^- = \operatorname{im} A^-AA^- \subseteq \operatorname{im} A^-A, \\ \ker A^-A &\supseteq \ker A = \ker AA^-A \supseteq \ker A^-A. \end{aligned}$$

- (A.6)

  1. Sei $x \in \operatorname{im} A^-$

$$\begin{aligned} &\to \exists w : A^-w = x \\ &\to \exists w : A^-AA^-w = A^-Ax \\ &\to \exists w : A^-w = A^-Ax \\ &\to x = A^-Ax \\ &\to \left(I - A^-A\right) x = 0 \\ &\to x \in \ker \left(I - A^-A\right) \\ \to &\operatorname{im} A^- \subseteq \ker \left(I - A^-A\right). \end{aligned}$$

  Sei nun $x \in \ker (I - A^-A)$

$$\begin{aligned} &\to x - A^-Ax = 0 \\ &\to \exists w, (w := Ax) : x = A^-w \\ &\to x \in \operatorname{im} A^- \\ \to &\ker \left(I - A^-A\right) \subseteq \operatorname{im} A^-. \end{aligned}$$

  2. Sei $x \in \ker A$

$$\begin{aligned} &\to x \in \ker A^-A \\ &\to x = x - A^-Ax = \left(I - A^-A\right) x \\ &\to x \in \operatorname{im} \left(I - A^-A\right) \\ \to &\ker A \subseteq \operatorname{im} \left(I - A^-A\right). \end{aligned}$$

  Sei nun $x \in \operatorname{im} (I - A^-A)$

$$\begin{aligned} &\to \exists w : w - A^-Aw = x \\ &\to \exists w : Aw - AA^-Aw = Ax \\ &\to \exists w : 0 = Ax \\ &\to x \in \ker A \\ \to &\operatorname{im} \left(I - A^-A\right) \subseteq \ker A. \end{aligned}$$

- Beweis von (A.7) erfolgt analog zum Beweis von (A.5).
- Beweis von (A.8) erfolgt analog zum Beweis von (A.6).

□

Lemma A.6. *Seien* $\mathcal{P} \in L(\mathbb{R}^m)$ *und* $\mathcal{R} \in L(\mathbb{R}^n)$ *Projektoren, dann ist* A^- *durch* (A.1) *und* (A.2) *und die zusätzlichen Bedingungen*

$$\begin{aligned} A^- A &= \mathcal{P} \text{ und} \\ AA^- &= \mathcal{R} \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt.

Beweis. [Lam01] □

A.4 Kronecker Produkt

Für die Vektorisierung der Matrix-Riccati-Gleichung wird das Kronecker Produkt und einige wichtige Rechenregeln benötigt. Für Details und weitere Ausführungen sei auf [HJ91] und [MN98] verwiesen.

Definition A.7 (Kronecker Produkt). ([HJ91]) Seien $A = [a_{ij}] \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ und $B \in L(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^t)$. Die Abbildung

$$\otimes : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^t) \to L(\mathbb{R}^{ms}, \mathbb{R}^{nt})$$

ist mittels

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^{ms}, \mathbb{R}^{nt})$$

definiert.

In der Literatur wird das Kronecker Produkt auch als direktes Produkt oder Tensor Produkt bezeichnet. Damit eng verbunden ist die folgende Definition.

Definition A.8. ([HJ91]) Sei $A = (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|, \dots, \mathbf{a}_m) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ eine Matrix mit den Spalten $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq m$. Die Abbildung

$$\mathrm{vec} : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{mn}$$

ist mittels

$$\mathrm{vec}(A) := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}$$

definiert.

Lemma A.9 (Rechenregeln). *A, B, C und D seien Matrizen. Dann gelten folgende Regeln*

$$\begin{aligned}
(A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T, \\
\operatorname{vec}(ABC) &= \left(C^T \otimes A\right) \operatorname{vec}(B), \\
\operatorname{vec}(AB) &= \operatorname{vec}(ABI) = (I \otimes A) \operatorname{vec}(B), \\
\operatorname{vec}(AB) &= \operatorname{vec}(IAB) = \left(B^T \otimes I\right) \operatorname{vec}(A), \\
\operatorname{rg}(A \otimes B) &= \operatorname{rg} A * \operatorname{rg} B.
\end{aligned}$$

Falls AC und BD existieren, so gilt

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

Falls $A + B$ und $C + D$ existieren, so gilt

$$(A + B) \otimes (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D.$$

Für $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ gilt

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11} \otimes B & A_{12} \otimes B \\ A_{21} \otimes B & A_{22} \otimes B \end{pmatrix}.$$

Falls $A \in L(\mathbb{R}^m), B \in L(\mathbb{R}^p)$ regulär sind, so gilt

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Beweis. [MN98] □

Lemma A.10. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann*

$$\exists! P(m,n) \in L(\mathbb{R}^{mn}) : \operatorname{vec} X^T = P(m,n) \operatorname{vec} X, \quad \forall X \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Die Matrix $P(m,n)$ hängt dabei nur von den Dimensionen m und n ab und ist gegeben durch

$$P(m,n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} E_{ij} \otimes E_{ij}^T = \left[E_{ij}^T\right]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}.$$

Dabei ist $E_{ij} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und

$$E_{ij} = [\delta_{ik}\delta_{jl}]_{\substack{1 \le k \le m, \\ 1 \le l \le n}} = \begin{pmatrix}
0 & & & 0 & & & 0 \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
& & 0 & 0 & 0 & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \\
0 & & & 0 & & & 0
\end{pmatrix}.$$

Weiterhin ist $P(m,n)$ eine Permutationsmatrix und es ist

$$P(m,n) = P(n,m)^T = P(n,m)^{-1}.$$

Beweis. [HJ91] □

Lemma A.11. *Seien $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $B \in L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$, $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$B \otimes A = P(m,p)^T (A \otimes B) P(n,q).$$

Beweis. [HJ91] □

Lemma A.12. *Seien $m, k \in \mathbb{N}$, $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m^2} \end{pmatrix} \in L\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{m^2}\right)$, wobei $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^k$ (für alle $1 \leq i \leq m^2$) die m^2 Zeilen von A sind. Dann entspricht die Multiplikation von links mit $P(m,m)$ der folgenden Abbildung*

$$\mathbf{a}_{(s-1)m+t} \mapsto \mathbf{a}_{(t-1)m+s}, \quad 1 \leq s, t \leq m.$$

Beweis. Die Voraussetzungen seien erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(m,m)A &= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(E_{ij} \otimes E_{ij}^T\right)\right)\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m^2} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\left(E_{ij} \otimes E_{ji}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m^2} \end{pmatrix}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(E_{(j-1)m+i \;\; (i-1)m+j}\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m^2} \end{pmatrix}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\begin{pmatrix} 0_{(j-1)+i-1} \\ \mathbf{a}_{(i-1)+j} \\ 0_{(j-1)i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_{m+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{(m-1)m+1} \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_{m+2} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{(m-1)m+2} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \\ \mathbf{a}_{m+m} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das bedeutet: Die Multiplikation von links mit $P(m,m)$ entspricht der Permutationsabbildung

$$\mathbf{a}_{(s-1)m+t} \mapsto \mathbf{a}_{(t-1)m+s}, \quad 1 \leq s, t \leq m.$$

□

Lemma A.13. *Es sei $U(Y)$ eine Matrixfunktion und $X \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
[\operatorname{vec} U(Y)]_{(\operatorname{vec} Y)} &= \operatorname{vec}\left([U]_{(\operatorname{vec} Y)}\right), \\
[\operatorname{vec} X]_{(\operatorname{vec} X)} &= I_{nk}, \\
\left[\operatorname{vec} X^T\right]_{(\operatorname{vec} X)} &= [P(k,n) \operatorname{vec} X]_{(\operatorname{vec} X)} \\
&= P(k,n).
\end{aligned}$$

Beweis. [MN98]

B Quelltexte

B.1 dae.m

Die Datei *dae.m* dient dazu, die Algebrodifferentialgleichung zu beschreiben und so dem Programm zum Testen auf singulären Traktabilitätsindex zur Verfügung zu stellen.

```
%%
%%
%%  Hella Döring
%%  Last Update: 14.10.2004
%%
%%  Beispieldatei zur Übergabe der DAE an die Datei main_dae.m
%%
%%  f((d(x,t))',x,t)=f(z,x,t)
%%  n - Anzahl der Gleichungen
%%
%%

function varargout = dae(z,x,t,flag,varargin)
  % DAE file of structure f((d(x,t))',x,t)=f(z,x,t)

  % Parameters:
  if isempty(flag)
    varargout{1} = f(z,x,t,varargin{:});
  else
    switch flag
     case ''
      varargout{1} =  f(z,x,t,varargin{:});
     case 'dfy'
      varargout{1} = dfy(z,x,t,varargin{:});
     case 'dfx'
      varargout{1} = dfx(z,x,t,varargin{:});
     case 'dft'
      varargout{1} = dft(z,x,t,varargin{:});
     case 'd'
      varargout{1} = d(x,t);
     case 'dx'
      varargout{1} = dx(x,t);
     otherwise
      error(['Unknown flag ''' flag '''.']);
    end
  end

        %% Gleichungen, die die DAE beschreiben
function [fzxt]=f(z,x,t,include parameter);
fzxt=zeros(n)
        %% Ersetzen Sie hier fzxt(i) durch die jeweilige Gleichung,
        %% i=1,...,n
        %% fzxt(1)=...
        %% ...
        %% fzxt(n)=...
```

```
        %% Partielle Ableitung von f nach y
function [dfyzxt]=dfy(z,x,t,include parameter);
dfyzxt=zeros(size(x),size(z));
        %% Weisen Sie hier die Werte für dfyzxt(i,j) zu,
        %% i=1,...,n und j=1,...,size(z)
        %% dfyzxt(i,j)=...
error(' daefile: not yet realized');

        %% Partielle Ableitung von f nach x
function [dfxzxt]=dfx(z,x,t,include parameter);
dfxzxt=zeros(n,size(x));
        %% Weisen Sie hier dfyzxt(i,j) die entsprechenden Werte zu,
        %% i=1,...,n und j=1,...,size(x)
        %% dfyzxt(i,j)=...
error(' daefile: not yet realized');

        %% Partielle Ableitung von f nach t
function [dftzxt]=dft(z,x,t,include parameter);
dftzxt=zeros(size(x),1);
        %% Weisen Sie hier dftzxt(i,1) die entsprechenden Werte zu,
        %% i=1,...,n
        %% dft(i)=...
error(' daefile: not yet realized');

        %% Angaben zu d(x,t)
function [dxt]=d(x,t);
dxt=zeros(size(z),1);
        %% Die jeweiligen Werte für dxt(i,1) werden hier festgelegt,
        %% i=1,...,size(z)
        %% dxt(1)=...
        %% ...
        %% dxt(size(z))=...

        %% Partielle Ableitung von d nach t
function [dxxt]=dx(x,t);
dxxt=zeros(size(z),size(z));
        %% Weisen Sie hier dxxt(i,j) die entsprechenden Werte zu
        %% i,j=1,...,size(z)
error(' daefile: not yet realized');
```

Quelltext B.1: dae.m

B.2 main_dae.m

Die Datei *main_ dae.m* dient dazu die Startwerte für die numerische Berechnungen festzulegen. Zusätzlich können hier noch verschiedene Parameter - abweichend von den Standardwerten festgelegt werden.

```
%%
%%
%%  Hella Döring
%%  Last Update: 14.10.2004
%%
%%  Beispieldatei zur Übergabe der Startwerte für t,x,z sowie eigener
%%  Parameter zum Testen der DAE
%%
```

```
        %% Legen Sie hier die Startwerte für t, x, z fest
        % Startwert für t
% t=0

        % Startwerte für x, je nach Dimension der Aufgabe
% x=[0;0.5]

        % Startwerte für z, je nach Dimension der Aufgabe
% z=[0.1;0.5]

xfunction='xintpol'
        % Hier müssen sie 'dae' ersetzten durch den Namen der Datei, in
        % der das Beispiel definiert ist.
[index, reg]=main_index_sing('dae',t,xfunction,3,t,x,z);
```

Quelltext B.2: main_dae.m

B.3 Bi_calc_sing.m

Das Unterprogramm *Bi_calc_sing.m* berechnet B_1 für singuläre und reguläre DAEs.

```
%%
%%
%%  Hella Döring
%%  Last Update: 14.10.2004
%%
%%  Version für regulären und singulären Index 0 oder 1
%%
%%  Bi_calc_sing berechnet B1 für singuläre und reguläre DAEs
%%
%%

function [Bi,rank_ok]=Bi_calc_sing(level,Bim1,Gi,D,Dm,prodPi,Pi,DPiDm,...
        daefile,xfunction,t,s_A,s_D,s_B,tresh,fid,rank_vec,argx,varargin);
global rank_ok;
rank_ok=1;
if level==1
  error('Bi_calc_sing: falscher aufruf');
elseif level ==2
  z0=DPiDm(:);
  DPiDm_prime= cal_DPiDm_t_sing(daefile,xfunction,t,s_A,s_D,s_B,z0,...
        tresh,fid,level,rank_vec,argx,varargin{:});
  Bi=(Bim1-Gi*Dm*DPiDm_prime*D*prodPi)*Pi;
  else
  error('Bi_calc_sing: falscher aufruf; nur für Index 0 und 1');
end;
```

Quelltext B.3: Bi_calc_sing.m

B.4 cal_DPiDm_sing.m

Das Unterprogramm *cal_DPiDm_sing.m* ermittelt $D_0\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1D_0^-$.

```
%%
%%
```

```
%%  Hella Döring
%%  Last Update: 13.10.2004
%%
%%  Version für regulären und singulären Index 0 oder 1
%%
%%  cal_DPiDm_sing berechnet D*P0*P1*Dm (d.h. nur für Level 2)
%%
%%

function z=cal_DPiDm_sing(p,t,daefile,xfunction,t0,s_A,s_D,s_B,threshold,...
                fid,level,rank_vec,argx,varargin);
global rank_ok;

%
%     Berechnung von xt := x(t) := x + (t-t0)*xp
%
xt=feval(xfunction,t,varargin{1:argx});
y=cal_dxtprime(daefile,xfunction,t,argx,varargin{:});
[Ui_tilde,diagSi,Sim,Faci,B0,A,D,Gi,Gim,Am,Dm,dim,m_i]=...
    chain_start_sing(daefile,y,xt,t,s_A,s_D,s_B,threshold,fid,...
                varargin{argx+1:end});
%
%     Überprüfe, ob Rangbedingungen erfüllt sind
%
if ~rank_vec(1)==dim
    rank_ok=0;
    z=sparse(size(y,1)*size(y,1),1);
    fprintf(fid,'\n%s\n',['cal_DPiDm: rank of G0 changed from ',...
               num2str(rank_vec(1)),' to ',num2str(dim)]);
    disp('Check the log-file !!!');
    return;
end;

%
%    Schwellwert, wird benötigt, um den Rang festzustellen.
%    D.h. hier wird festgelegt, ab wann ein Wert als Null angesehen wird.
%    eps ist ungefähr 2*10^-16
          schwellwert=10*eps;    % bisher ausreichend
        % schwellwert=0;         %das ganz wird so außer Kraft gesetzt

%%
%%  hier startet die Berechnung von Q1
%%
[k,n]=size(B0);

%    Speicherplätze für Projektoren werden vorbereitet
Pi=zeros(n,n,level);
Qi=zeros(n,n,level);
Wi=zeros(n,n,level);
[Pi(:,:,1),Qi(:,:,1)]=P_and_Q(Gi,Gim);

% Bestimme G1 und SVD
G0=Gi;
G1=G0+B0*Qi(:,:,1);

[U1, Sigma1, V1]=svd(G1);
rankS1=rank_of_Sigma(Sigma1,threshold,fid);
```

```
S1=Sigma1(1:rankS1,1:rankS1);
[r1,next_sing_value]=rank_of_Sigma(S1,threshold,fid);
S1_m=diag(1./diag(S1));

%
%   Bedingung, die Q1 für sing. Index 1 (oder höher) erfüllen muss
%   Die exakte Beschreibung ist in der zugehörigen Diplomarbeit
%   von Hella Döring - Oktober 2004 zu finden
%
E=kron(Qi(:,:,1)'*V1, Qi(:,:,1)*V1)-kron(Qi(:,:,1)'*V1,V1);

%
%   Aus E kann jetzt jede i*n+j-te Spalte gelöscht werden,
%   mit i=0..n-1, j=1..n-r1.
%   Das Ergebnis wird dann in G und H gesichert.
%   Dann ist G* vec(-m_G1 S1) = H*w=w1
%
G=E(:,r1+1:n);
H=E(:,r1*n+r1+1:r1*n+n);
W=speye(n-r1);
w=-W(:);
if r1>1
  for i=1:(r1-1)
     G=[G, E(:,i*n+r1+1:i*n+n)];
  end;
  for i=r1+1:n-1
     H=[H, E(:,i*n+r1+1:i*n+n)];
  end;
end;
w1=H*w;
F=G*(kron(-S1,speye(n-r1)));

% Gleichungssystem lösen (F*m_G1=w1), eine Lösung reicht aus,
% d.h. GLS muss nicht eindeutig zu lösen sein
[sizew1,sizem_G1]=size(F);
[QF, RF, EF]=qr(full(F));
% F* EF = QF * RF , EF Permutationsmatrix, QF orthogonale Matrix,
%        RF - rechte obere Dreicksmatrix, Elemente diag(RF) fallend
% F = QF * RF * inv(EF)
% QF * RF * inv(EF) *m_G1 = w1
% RF * inv(EF) *m_G1 = QF' * w1, mt = inv(EF)*m_G1, w1t=QF' * w1
% RF * mt = w1t
w1t=QF'*w1;
rgRF=0;
for i=1:min(size(RF,1),size(RF,2))
   if abs(RF(i,i))>schwellwert
        rgRF=rgRF+1;
   end
end

% Reduziere das Gleichungssystem nun auf einen eindeutig zu
% lösenden Teil. Die frei wählbaren Parameter werden "0" gesetzt
RFred = RF(1:rgRF, 1:rgRF);
w1tred = w1t(1:rgRF);
if rgRF==0;
    M_G1=sparse(n-r1,r1);
  else
```

```
     mtred= RFred\w1tred;
     mt=[mtred;sparse(sizem_G1-rgRF,1)];
     m_G1=EF*mt;

% Lösung m_G1 in Matrix M_G1 umschreiben
     M_G1=reshape(m_G1,n-r1,r1);
end

%% Q1 konstruieren
if n==r1
    Qi(:,:,2)=V1*[sparse(r1,n);-M_G1*S1]*V1';
  else
    Qi(:,:,2)=V1*[sparse(r1,r1), sparse(r1,n-r1);-M_G1*S1, speye(n-r1)]*V1';
end;

Pi(:,:,2)=speye(n)-Qi(:,:,2);
DPiDm=D*Pi(:,:,1)*Pi(:,:,2)*Dm;
z=DPiDm(:);
```

Quelltext B.4: cal_DPiDm_sing.m

B.5 cal_DPiDm_t_sing.m

Das Unterprogramm *cal_DPiDm_t_sing.m* berechnet die Ableitung von $D_0\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1D_0^-$ nach t.

```
%%
%%
%%  Hella Döring
%%  Last Update: 14.10.2004
%%
%%  Version für regulären und singulären Index 0 oder 1
%%
%%  cal_DPiDm_t_sing berechnet Ableitung von DPiDm nach t
%%
%%

function  DPiDm_t= cal_DPiDm_t_sing(daefile,xfunction,t,s_A,s_D,s_B,z0,...
                threshold,fid,level,rank_vec,argx,varargin);
global rank_ok;
%tresh(1)=sqrt(eps);
tresh(1)=1;
t0=t;
[z]=numjac('cal_DPiDm_sing',0,t,z0,tresh,[],0,[],[],daefile,xfunction,...
        t0,s_A,s_D,s_B,threshold,fid,level,rank_vec,argx,varargin{:});
m=sqrt(length(z));
DPiDm_t=reshape(z,m,m);
if rank_ok==1
    normvalue=norm(DPiDm_t,1);
    fprintf(fid,'\n%s\n\n',['norm (DP0...P1D-)'' = ',...
                num2str(normvalue),', 1 = ',num2str(level-1)]);
    if (normvalue ~= 0)
        print_mat(fid,['Chain level i: ',num2str(level-1),...
                '  DP0...PiDm'' =''],DPiDm_t);
    end;
end;
```

Quelltext B.5: cal_DPiDm_t_sing.m

B.6 chain_start_sing.m

Das Unterprogramm *chain_start_sing.m* ermittelt, auf Grundlage von A_0, D_0 und B_0, die ersten Elemente der Matrixkette.

```
%%
%%
%%  Hella Döring
%%  Last Update: 10.07.2004
%%
%%  Version für regulären und singulären Index 0 oder 1
%%
%%  chain_start_sing ermittelt die ersten Elemente der Matrixkette,
%%  auf Grundlage von A, D und B der regulären bzw. singulären DAE.
%%

% chain_start_sing calculates matrix chain components using the
% matrices A, D and B for regular and singular DAEs
%
% function [UA,Sigma,Sigma_m,VD,B,A,D,G_0,G_0m,Am,Dm,r,m_0]...
%     =chain_start(daefile,y,x,t,s_A,s_D,s_B,threshold,fid,varargin);
% daefile of structure f((d(x,t))',x,t)=f(y,x,t)
% y, x, t are the parameters of f
% s_A   - .true.  analytic representation of df/dy=A,
%         .false. numerical calculation of A
% s_D -   .true.  analytic representation of d d(x,t)/dx=D in daefile
%         .false. numerical calculation of D
% s_B   - .true.  analytic representation of df/dx=B in daefile
%         .false. numerical calculation of B
% threshold - all singular values < threshold are set to zero
%             (rank determination)
% fid - file identifier
% varargin - additional parameters of daefile
% Output:
%
% UA
% Sigma        = diag(sing. values of G_0)
% Sigma_m      reflexive generalized inverse of Sigma
% VD
% B = df/dx
% A = df/dy = UA SA VA'
% D = d d(x,t)/dx     D = UD SD VD'
% G_0 = A*D = UA * Sigma * VD'
% G_0m   reflexive generalized inverse of G_0
% Am   reflexive generalized inverse of A
% Dm   reflexive generalized inverse of D
% r - rank of Sigma
% m_0 - free parameter in G_0m ( set to zero )
%

function [UA,Sigma,Sigma_m,VD,B,A,D,G_0,G_0m,Am,Dm,r,m_0]...
    =chain_start_sing(daefile,y,x,t,s_A,s_D,s_B,threshold,fid,varargin);

%%
%% Berechne A, D, B, Dm und die zugehörigen SVDs
%%
[A,D,B]= calc_A_D_B(daefile,y,x,t,s_A,s_D,s_B,varargin{:});
[m,n]=size(D);
```

```
[k,l]=size(A);

% D = m x n matrix
% A = k x m (m=l) matrix

% SVD von A, D
[UA,SA,VA] = svd(full(A));
[UD,SD,VD] = svd(full(D));
% UA*SA*VA'-A
[rA,next_sing_value]=rank_of_Sigma(SA,threshold,fid);
[rD,next_sing_value]=rank_of_Sigma(SD,threshold,fid);
SAsigma=SA(1:rA,1:rA);
SDsigma=SD(1:rD,1:rD);

% Überprüfe korrekten Rang von A und D
if rA == rD
  VAt=VA';
  H1=VAt(1:rA,:)*UD(:,1:rD);
  H2=VAt(1:rA,:)*UD(:,rD+1:m);
  H3=VAt(rA+1:m,:)*UD(:,1:rD);
  S=SAsigma*H1*SDsigma;
  [U,Sigma,V] = svd(S);
  [r,next_sing_value]=rank_of_Sigma(Sigma,threshold,fid);
  if rA == r
    m_0=sparse(n-r,k);
    SAsigma_m=diag(1./diag(SAsigma));
    % Konstruiere Am
    if m==r
      Am=VA*[SAsigma_m,sparse(r,k-r)]*UA';
    else
      Am=VA*[SAsigma_m,sparse(r,k-r);H3*(H1\SAsigma_m),sparse(m-r,k-r)]*UA';
    end;

    SDsigma_m=diag(1./diag(SDsigma));
    m_D=m_0(:,1:r)*Sigma*V'*SDsigma_m;
    % Konstruiere Dm
    if n==r
      Dm=VD*[SDsigma_m,SDsigma_m*(H1\H2)]*UD';
    else
      H1H2=H1\H2;
      Dm=VD*[SDsigma_m,SDsigma_m*H1H2;m_D,m_D*H1H2]*UD';
    end;

    UA(:,1:rA)=UA(:,1:rA)*U;
    VD(:,1:rD)=VD(:,1:rD)*V;

    % Berechne von G0 und G0m
    G_0=UA*[Sigma,sparse(rD,n-rD);sparse(k-rD,n)]*VD';
    Sigma_m=diag(1./diag(Sigma));
    if (n==r & k==r)
      G_0m=VD*[Sigma_m]*UA';
    else if k==r
            G_0m=VD*[Sigma_m;m_0]*UA';
        else  if n==r
            G_0m=VD*[Sigma_m,sparse(r,k-r)]*UA';
        else
            G_0m=VD*[Sigma_m,sparse(r,k-r);m_0]*UA';
```

```
            end;
        end;
      end;
    else
      error('chain_start_sing.m: A and D not proper - do not match');
    end;
else
    rA
    rD
    SA
    SD
    error('chain_start_sing.m: A and D not proper - different rank');
end;
```

Quelltext B.6: chain_start_sing.m

B.7 main_index_sing.m

Das Programm *main_index_sing.m* gibt den Traktabilitätsindex `index` und den Typ des Indexes `reg` zurück.

```
%%
%%
%%  Hella Döring
%%  Last Update: 13.10.2004
%%
%%  Version für regulären und singulären Index 0 oder 1
%%
%%  main_index_sing gibt den Traktabilitätsindex = index
%%  und den Typ des Indexes = reg (singulär oder regulär) zurück
%%
%%  Eine genaue Beschreibung des Algorithmuses, insbesondere der
%%  Konstruktion des Projektors Q1, findet sich in der zugehörigen
%%  Diplomarbeit von Hella Döring - Oktober 2004
%%
%%  dabei bedeuten die Werte von reg
%%  0 - singulärer Index
%%  1 - regulärer Index
%%  2 - unbekannter Typ, Index ist größer 1 oder existiert nicht
%%  3 - DAE ist singulär, Index ist größer 1 oder existiert nicht
%%  4 - es ist kein Index definiert, da für die DAE kein zulässiger
%%      Projektor Q1 existiert
%%  5 - FEHLER
% Shared Parameter Version for matlab program main_index

function [index, reg]=main_index_sing(daefile,t,xfunction,argx,varargin)

% read the actual parameter version from the binary files
load parameter_mainconsi threshold;
load parameter_general print_level s_A s_D s_B s_log;

fid=file_open_date(daefile);
fprintf(fid,'%s\n',headline(daefile));

given_index=-1;

[ok,index,reg]=matrix_sequence_sing(daefile,xfunction,t,s_A,s_D,s_B,...
```

```
        given_index,threshold,fid,0,argx,varargin{:});

% Ausgaben
if print_level>0
    index
  switch reg
    case 0
      textreg = 'singulärer Index';
    case 1
      textreg = 'regulärer Index';
    case 2
      textreg = 'unbekannt, größer 1 oder existiert nicht. G_i ist quadratisch
         .';
    case 3
      textreg = 'singuläre DAE, Index ist unbekannt, größer 1 oder existiert
         nicht. G_i ist nicht quadratisch.';
    case 4
      textreg = 'nicht definiert';
    otherwise
      textreg = 'FEHLER';
  end

  dispreg= ['Traktabilitätsindex der DAE: ', textreg];
  disp(dispreg);
end
if print_level==2
   fprintf(fid,'\n Traktabilitätsindex der DAE: %s %i', textreg, index);
end


% for the creation of mainindex-logfile
% ====================================
if (s_log == 1 & print_level == 2)
    logmainindex=[daefile,'_',date,'.log'];
    log_parameter_mainindex(logmainindex);
end;
    % delete the logfile if switch s_log==0



fprintf('
    ---------------------------------------------------------------------\n');
fprintf('END OF main_index ... The following logfiles have been created:\n');
if (s_log == 1 & print_level == 2)
  fprintf('from main_index:                        %s\n',logmainindex);
else
  fprintf(' NO logfiles');
end;
file_close_date(fid);
```

Quelltext B.7: main_index_sing.m

B.8 matrix_sequence_sing.m

Das Unterprogramm *matrix_sequence_sing.m* ermittelt die weiteren Elemente der Matrixkette. Bei der Konstruktion von $\mathcal{Q}_1$ werden die Bedingungen für singulären Traktabilitätsindex berücksichtigt.

```
%%
%%
%%  Hella Döring
%%  Last Update: 13.10.2004
%%
%%  Version für regulären und singulären Index 0 oder 1
%%
%%  matrix_sequence_sing ermittelt die Elemente der Matrixkette
%%  unter Berücksichtigung der Bedingungen für singulären Index
%%
%%  zurückgegeben werden der Traktabilitätsindex = index
%%  und der Typ des Indexes = reg (singulär oder regulär) zurück
%%
%%  dabei bedeuten die Werte von reg
%%  0 - singulärer Index
%%  1 - regulärer Index
%%  2 - unbekannter Typ, Index ist größer 1 oder existiert nicht
%%  3 - DAE ist singulär, Index ist größer 1 oder existiert nicht
%%  4 - es ist kein Index definiert, da für die DAE kein zulässiger
%%      Projektor Q1 existiert
%%  5 - FEHLER

% matrix_sequence_sing determines the index of a (singular or regular)
% DAE (of index 0 or 1) described in the routine daefile
%
% function [index,reg]=matrix_sequence_sing(daefile,xfunction,t,s_A,...
%       s_D,s_B,threshold,fid,argx,varargin);
%
% daefile of structure f((d(x,t))',x,t)=f(y,x,t)
% xfunction - x(t), where its parameters are the first argx parameters
%              in varargin
% t - timepoint
% s_A   - .true.  analytic representation of df/dy=A,
%         .false. numerical calculation of A
% s_D -   .true.  analytic representation of d d(x,t)/dx=D in daefile
%         .false. numerical calculation of D
% s_B   - .true.  analytic representation of df/dx=B in daefile
%         .false. numerical calculation of B
% given_index - reduces the computation if you give the known index
%              -1  - check of the index (default)
%               k  - integer value of the given index
% threshold - all singular values < threshold are set to zero
%             (rank determination)
% fid - file identifier
% canPro - logical: if 1(true) calculation of canonical projector
%              (for index 0, 1 and 2 only)
% argx - number of parameters of xfunction in varargin
% varargin - additional arguments of xfunction and daefile
%
function [ok,index,reg,A,R,D,rankD,B0,Dm,Q0,P0,W0,DP1,rankDP1,W1,...
        rankW1,U,state]=matrix_sequence_sing(daefile,xfunction,t,...
        s_A,s_D,s_B,given_index,threshold,fid,canPro,argx,varargin);
ok=1;
y=cal_dxtprime(daefile,xfunction,t,argx,varargin{:});
x=feval(xfunction,t,varargin{1:argx});
[Ui_tilde,diagSi,Sim,Faci,B0,A,D,Gi,Gim,Am,Dm,dim,m_i]=chain_start_sing...
```

```
        (daefile,y,x,t,s_A,s_D,s_B,threshold,fid,varargin{argx+1:end});

%%  Schwellwert, wird benötigt, um den Rang festzustellen.
%%  D.h. hier wird festgelegt, ab wann ein Wert als Null angesehen wird
%%  eps ist ungefähr 2*10^-16
          schwellwert=10*eps;    % bisher ausreichend
        % schwellwert=0;         %das ganz wird so außer Kraft gesetzt


%%  normschwelle: eine Matrix, deren Norm kleiner ist, soll als
%%  Nullmatrix betrachtet werden
        normschwelle = 100*threshold;
%
%   initialization of vector with the ranks of the different levels
%
rank_vec=[dim];
%
mS=m_i(:,1:dim)*diagSi;
%
%   storage of V_D for later use (computation of rank DP_1)
%
V_D=Faci;
%
%   how to compute the matrices - numerisch oder analytisch
%
text=' (computed ';
num='numerically)';
ana='analytically)';
if s_A
    textA=['A',text,ana];
else
    textA=['A',text,num];
end;
if s_D
    textD=['D',text,ana];
else
    textD=['D',text,num];
end;
if s_B
    textB=['B',text,ana];
else
    textB=['B',text,num];
end;
print_mat(fid,textA,A);
print_mat(fid,textD,D);
print_mat(fid,textB,B0);
%
%   calucation of R
%
R=Am*A;
rankD=dim;

%% reg ist variable, die anzeigt, welchen typ die dae hat:
reg=5;

index=-1;
n=size(D,2);
```

```
%
%   print of rank
%
fprintf(fid,'\n%s\n',['Rank of 0th level (G0):',num2str(dim)]);
%
k=size(A,1);

%%  G0 quadratisch und regulär? Dann regulärer Index 0
if (dim==n & k==n) | given_index == 0
    %disp('index = 0');
    fprintf(fid,'\n%s\n','index = 0');
    index=0;
    reg=1;
  else
    %%%% hier werden später alle Pi und Qi und Wi gesichert
    Pi=zeros(n,n,n);
    Qi=zeros(n,n,n);
    Wi=zeros(n,n,n);

    %%%% zunächst brauchen wir P0 und Q0
    [Pi(:,:,1),Qi(:,:,1)]=P_and_Q(Gi,Gim);
    print_mat(fid,' Q0 =',Qi(:,:,1));
    P0=Pi(:,:,1);
    Q0=Qi(:,:,1);

%% Berechnung von G1
    G0=Gi(:,:,1);
    B0Q0=B0*Q0;
    normtest=norm(B0Q0,1);
    fprintf(fid,'\n Norm von B0*Q0= %e \n',normtest);
    G1=G0+B0Q0;

%% sing. Index 0?
  if normtest < threshold
    index=0;
    reg=0;
   else
    G01=[G0;G1];
    r01=rank(G01);

%% Nur zur Information
    if r01==n
      fprintf(fid,'N0 geschnitten N1 = 0 \n');
     else
      fprintf(fid,'N0 geschnitten N1 ist nicht 0 \n');
    end;

%% SVD von G1
    print_mat(fid,'G1=',G1);
    [U1, Sigma1, V1]=svd(G1);
    rankS1=rank_of_Sigma(Sigma1,threshold,fid);
    S1=Sigma1(1:rankS1,1:rankS1);
    [r1,next_sing_value]=rank_of_Sigma(S1,threshold,fid);
    S1_m=diag(1./diag(S1));

%% Index 1 (sing. und reg.)?
    if (k==n & r1==n)
```

```
      index=1;
      reg=1;
     else

%% Stelle Bedingung sicher, dass Q1 so konstruiert wird, dass
%% Bedingung für sing. T-index 1 erfüllt ist
      E=kron(Q0'*V1, Q0*V1)-kron(Q0'*V1,V1);
%%  Aus E kann jetzt jede i*n+j-te Spalte gelöscht werden,
%%  mit i=0..n-1, j=1..n-r1.
%%  Das Ergebnis wird dann in G und H gesichert.
%%  Dann ist G* vec(-m_G1 S1) = H*w=w1.
%%
      G=E(:,r1+1:n);
      H=E(:,r1*n+r1+1:r1*n+n);
      W=speye(n-r1);
      w=-W(:);
      if r1>1
        for i=1:(r1-1)
          G=[G, E(:,i*n+r1+1:i*n+n)];
        end;
        for i=r1+1:n-1
          H=[H, E(:,i*n+r1+1:i*n+n)];
        end;
      end;
      w1=H*w;
      F=G*(kron(-S1,speye(n-r1)));
      [sizew1,sizem_G1]=size(F);
      [QF,RF,EF]=qr(full(F));
% F* EF = QF * RF , EF Permutationsmatrix, QF orthogonale Matrix,
%       RF - rechte obere Dreicksmatrix, Elemente diag(RF) fallend
% F = QF * RF * inv(EF)
% QF * RF * inv(EF) *m _G1= w1
% RF * inv(EF) *m_G1 = QF' * w1, mt = inv(EF)*m_G1, w1t=QF' * w1
% RF * mt = w1t
      w1t=QF'*w1;
      rgRF=0;
      for i=1:min(size(RF,1),size(RF,2))
        if abs(RF(i,i))>schwellwert
          rgRF=rgRF+1;
        end
      end

% Reduziere das Gleichungssystem nun auf eindeutig zu lösenden Teil:
% dazu werden frei zu wählende Parameter "0" gesetzt und getestet ob
% eine Lösung dazu existiert
      RFred = RF(1:rgRF, 1:rgRF);
      w1tred = w1t(1:rgRF);
      % Lösung möglich ?
      test=0;
      if rgRF< sizew1
        for i=rgRF+1:sizew1;
          if abs(w1t(i))>schwellwert
            test=1;
          end
        end
      end;
      if test~=0   %keine Lösung
```

```
          fprintf(fid,'Es gibt kein Q1, welches die Bedingung erfüllt, es ist
              kein T-index definiert. \n');
          disp('Es gibt kein Q1, welches die Bedingung erfüllt, es ist kein T-
              index definiert. \n');
          reg=4;
        else        %eine Lösung
          if rgRF==0;
            M_G1=sparse(n-r1,r1);
           else
            % RFred ist regulär.
            mtred= RFred\w1tred;
            mt=[mtred;sparse(sizem_G1-rgRF,1)];
            m_G1=EF*mt;
            M_G1=reshape(m_G1,n-r1,r1);
          end
          if n==r1
            Qi(:,:,2)=V1*[sparse(r1,n);-M_G1*S1]*V1';
           else
            Qi(:,:,2)=V1*[sparse(r1,r1), sparse(r1,n-r1);-M_G1*S1, ...
                  speye(n-r1)]*V1';
          end;
          rank_vec=[rank_vec, rank(G1)];
          Pi(:,:,2)=speye(n)-Qi(:,:,2);
          DPiDm=D*Pi(:,:,1)*Pi(:,:,2)*Dm;
          level=2; %weil B1 für die Berechnung von G2 gebraucht wird
          prodPi=Pi(:,:,1);
          [B_1,ok_B1]=Bi_calc_sing(level,B0,G1,D,Dm,prodPi,Pi(:,:,1),...
                  DPiDm,daefile,xfunction,t,s_A,s_D,s_B,threshold,fid,...
                  rank_vec,argx,varargin{:});
          print_mat(fid,'B_1',B_1);
          B1Q1=B_1*Qi(:,:,2);
          normtest=norm(B1Q1,1);
          fprintf(fid,'\n Norm von B1*Q1= %e \n',normtest);
          print_mat(fid,'B1*Q1',B1Q1);

%  Falls B1*Q1 Null ist, dann ist die DAE singulär mit Index 1;
%  sonst ist der Index höher oder existiert nicht.
% Falls k==n ist regulärer Index möglich.
          if normtest < normschwelle
            index =1;
            reg=0;
           else
            index =-1;
            if k==n
             reg=2;
            end;
          end;
        end
      end;
    end;
end;
```

Quelltext B.8: matrix_sequence_sing.m

Literaturverzeichnis

[AMR88] Ascher, U. M., Mattheij, R. M. M. und Russel, R. D. *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. Series in Computational Mathematics. Prentice-Hall Inc., 1988.

[AP98] Ascher, U. M. und Petzold, L. R. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics), 1998.

[BKM03] Balla, K., Kurina, G. A. und März, R. *Index criteria for differential algebraic equations arising from linear-quadratic optimal control problems*. Preprint 2003-14, Humboldt-Universität zu Berlin, 2003.

[BM02] Balla, K. und März, R. *A Unified Approach to Linear Differential Algebraic Equations and their Adjoints*. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 21 (3): 783–802, 2002. Ursprünglich veröffentlicht: Unter dem gleichen Namen. Preprint 2000-18, Humboldt-Universität zu Berlin, 2000.

[BO71] Boullion, T. L. und Odell, P. L. *Generalized Inverse Matrices*. John Wiley & Sons, Inc., 1971.

[BS87] Bronstein, I. N. und Semendjajew, K. A. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 23. Auflage, 1987.

[GM86] Griepentrog, E. und März, R. *Differential-Algebraic Equations and Their Numerical Treatment*, Band 88 von *Teubner-Texte zur Mathematik*. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1. Auflage, 1986.

[Heu95] Heuser, H. *Gewöhnliche Differentialgleichungen, Einführung in Lehre und Gebrauch*. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner Stuttgart, 3. Auflage, 1995.

[HH94] Hämmerlin, G. und Hoffmann, K.-H. *Numerische Mathematik*. Grundwissen Mathematik, Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, 4. Auflage, 1994.

[HJ91] Horn, R. A. und Johnson, C. R. *Topics in matrix analysis*. Cambridge University Press, 1991.

[HM00] Higueras, I. und März, R. *Formulating differential algebraic equations properly*. Preprint 2000-20, Humboldt-Universität zu Berlin, 2000.

[HW96] Hairer, E. und Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Band 14 von *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 1996.

[KM90] Kunkel, P. und Mehrmann, V. *Numerical Solution of Differential Algebraic Riccati Equations*. Linear Algebra and its Applications, 137/138: 39–66, 1990.

[KM97] Kunkel, P. und Mehrmann, V. *The linear quadratic optimal control problem for linear descriptor systems with variable coefficients*. Math. Control Signals, 10 (3): 247–264, 1997.

[KM00] Kurina, G. A. und März, R. *On linear-quadratic optimal control problems for time-varying descriptor systems*. Preprint 2000-10, Humboldt-Universität zu Berlin, 2000.

[Kur93] Kurina, G. A. *Singular Perturbations of Control Problems with Equation of State Not Solved for the Derivative (A Survey)*. Journal of Computer and System Sciences International, 31 (6): 17–45, 1993.

[Kur00] Kurina, G. A. *Feed-back control for time-varying descriptor systems*. Systems Science, 26 (3): 47–59, 2000.

[Lam01] Lamour, R. *Index determination for DAEs*. Preprint 2001-19, Humboldt-Universität zu Berlin, 2001.

[MN98] Magnus, J. R. und Neudecker, H. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. Wiley Series in Porbability and Statistics. John Wiley & Sons Chichester, 1998.

[MW01] März, R. und Winkler, R. *Analysis und Numerik von Algebrodifferentialgleichungen*, 2001. Nach einer Vorlesung im WS97/98 und SS00 von Prof. R. März.

[Mär01a] März, R. *Adjoint Equations of Differential-Algebraic Systems and Optimal Control Problems*. Trudui Instituta Matematiki, 7: 88–97, 2001. Nationalnaja Akademija Nauk Bjelarus.

[Mär01b] März, R. *The index of linear differential algebraic equations with properly stated leading terms*. Preprint 2001-7, Humboldt-Universität zu Berlin, 2001.

[Mär01c] März, R. *Nichtlineare Algebro-Differentialgleichungen mit proper formuliertem Hauptterm*. Preprint 2001-3, Humboldt-Universität zu Berlin, 2001.

[Mär02a] März, R. *Differential Algebraic Systems with Properly Stated Leading Term and MNA Equations*. Preprint 2002-13, Humboldt-Universität zu Berlin, 2002.

[Mär02b] März, R. *The index of linear differential algebraic equations with properly stated leading terms*. Results in Mathematics, 42: 308–338, 2002. Birkhäuser Verlag, Basel.

[Mär02c] März, R. *Solvability of linear differential algebraic equatins with properly stated leading terms*. Preprint 2002-12, Humboldt-Universität zu Berlin, 2002.

[Mär04] März, R. *Projectors for matrix pencils*, 2004. Erscheint demnächst als Preprint, Humboldt-Universität zu Berlin.

[Pet98] Petry, T. *Realisierung des Newton-Kantorovich-Verfahrens für nichtlineare Algebro-Differentialgleichungen mittels Abramov-Transfer*. Dissertation, Humobldt-Universität zu Berlin, 1998.

[Rei72] Reid, W. T. *Riccati Differential Equations*, Band 86 von *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press New York and London, 1972.

[vL87] van Loon, P. M. *Continuous Decoupling Transformations for Linear Boundary Value Problems*. Dissertation, Technische Universiteit Eindhoven, 1987.

[Zel00] Zelikin, M. I. *Control Theory and Optimization I*, Band 86 von *Encyclopedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.

[Zie79] Zielke, G. *Motivation und Dartstellung von verallgemeinerten Matrixinversen*. Beiträge zur Numerischen Mathematik, 7: 177–218, 1979. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Hella Döring
Berlin, den 26. Oktober 2004